

# NOUVEAUX MODÈLES ET ALGORITHMES ASSOCIÉS AUX COUPLAGES MUTUELS EN RÉGIME HARMONIQUE, COMPATIBLES AVEC LA MÉTHODE NODALE MODIFIÉE

Dumitru TOPAN, Lucian MANDACHE

Université de Craiova, Faculté d'Électrotechnique  
dtopan@central.ucv.ro; lmandache@elth.ucv.ro

Résumé : Considérée parmi les plus efficaces méthodes d'analyse en régime harmonique, la méthode nodale ne se prête pas au calcul des circuits qui contiennent des bobines couplées par induction, d'autant plus si les couplages mutuels sont multiples et non réciproques. On propose plusieurs nouveaux modèles associés aux couplages magnétiques, qui permettent à dépasser la limite mentionnée ci-dessus et qui confère à la méthode nodale modifiée le plus haut degré de généralité. En partant des nouveaux modèles, deux algorithmes de haute performance ont été conçus, présentés et puis validés à l'aide des schémas concrets.

Mots clés : Régime harmonique, couplage magnétique, modèle, méthode nodale modifiée, logiciel dédié.

## 1. INTRODUCTION

Les signaux d'un circuit linéaire peuvent être décomposés en sommes ou intégrales de sinusoides dont on peut étudier séparément les réponses partielles, afin de construire la réponse globale par superposition [1,2]. Le régime harmonique se trouve à la base de l'analyse fréquentielle [2,3].

La méthode nodale consiste à écrire un système d'équations en les  $(n-1)$  potentiels des nœuds indépendants [1,4]. Le nœud de référence étant choisi, les tensions des branches s'expriment en fonction des potentiels des nœuds. Pour exprimer le courant d'une branche en fonction de la seule tension aux bornes de celle-ci, le courant doit être exempt de couplages magnétiques ; l'application de la méthode nodale est malaisée lorsque le schéma électrique suppose des inductances mutuelles [1,5,6].

On peut dépasser cette faiblesse de la méthode nodale en utilisant l'algorithme basé sur la matrice des impédances des branches passives [7]. Pour tout circuit qui contienne seulement des paires de bobines couplées par induction, une modalité d'écriture directe de la matrice des admittances des branches passives est proposée. Ainsi on évite l'inversion de la matrice des impédances, parfois accompagnée par de calculs importants.

Le but essentiel de cet ouvrage est de présenter quelques nouveaux modèles associées aux couplages mutuels réciproques et non réciproques, qui permettent à généraliser l'application de la méthode

nodale modifiée [8,9,10]. En partant des nouveaux modèles, on peut concevoir l'algorithme spécifique et son logiciel dédié.

## 2. MATRICE DES IMPÉDANCES

Le nœud „terre“ étant choisi, il est utilisé comme référence pour la définition des potentiels des autres nœuds du circuit; ces derniers potentiels constituent les composantes du vecteur  $\underline{V}$ . Les tensions aux bornes passives  $\underline{U}_p$  s'expriment par la relation [6,8]

$$\underline{U}_p = \mathbf{A}_p^t \underline{V} \quad (1)$$

où on note par  $\mathbf{A}_p$  la matrice d'incidence réduite associée aux branches passives [8].

Les courants des branches passives  $\underline{I}_p$  dépendent des tensions  $\underline{U}_p$  par la relation suivante

$$\underline{I}_p = \underline{\mathbf{Y}}_p \underline{U}_p, \quad (2)$$

où  $\underline{\mathbf{Y}}_p$  est la matrice des admittances des branches passives [8]. Il suffit dans la relation précédente de remplacer  $\underline{U}_p$  par l'expression (1), et il vient

$$\underline{I}_p = -\underline{\mathbf{Y}}_p \mathbf{A}_p^t \underline{V}. \quad (3)$$

Cette dernière relation exprime les courants  $\underline{I}_p$  à l'aide des potentiels des nœuds  $\underline{V}$ .

Les sources idéales indépendantes de tension et les portes commandées des sources de tension liées

constituent les branches incompatibles par rapport à la méthode nodale. Leurs courants seront considérés comme variables du système d'équations nodales modifiées, à côté des potentiels des nœuds [8,11]. On peut obtenir la matrice  $\underline{Y}_p$  en partant de la matrice des impédances complexes des branches passives  $\underline{Z}_p$ , où les impédances propres occupent la diagonale principale et les impédances de couplages sont placées à l'extérieur de cette diagonale. Parce que la matrice  $\underline{Z}_p$  est toujours carrée, non singulière et donc inversable, il vient

$$\underline{Y}_p = \underline{Z}_p^{-1}. \quad (4)$$

Si le circuit n'a pas de bobines couplées par induction, l'inversion de la matrice  $\underline{Z}_p$  n'est pas nécessaire, parce qu'on peut écrire facilement la matrice diagonale  $\underline{Y}_p$ .

On peut écrire d'une manière directe la matrice  $\underline{Y}_p$  pour tous circuits qui contiennent seulement une ou plusieurs paires de bobines couplées par induction. Soit les bobines d'une telle paire, numérotée  $i$  et  $m$ , donc la matrice impédance du circuit

$$\underline{Z}_p = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \underline{Z}_i & \dots & 0 & \dots & \underline{Z}_{im} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \underline{Z}_k & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \underline{Z}_{mi} & \dots & 0 & \dots & \underline{Z}_m & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \underline{Z}_p \end{bmatrix}. \quad (5)$$

La matrice admittance doit être

$$\underline{Y}_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{\underline{Z}_m}{\Delta_{im}} & \dots & 0 & \dots & \frac{-\underline{Z}_{mi}}{\Delta_{im}} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{1}{\underline{Z}_k} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{-\underline{Z}_{im}}{\Delta_{im}} & \dots & 0 & \dots & \frac{-\underline{Z}_i}{\Delta_{im}} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{1}{\underline{Z}_p} \end{bmatrix} \quad (6)$$

où  $\Delta_{im} = \underline{Z}_i \underline{Z}_m - \underline{Z}_{im} \underline{Z}_{mi}$ .

Par exemple, si la matrice impédance du circuit est

$$\underline{Z}_p = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & 0 & \underline{Z}_{13} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & 0 & 0 & \underline{Z}_{25} \\ \underline{Z}_{31} & 0 & \underline{Z}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_4 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_{52} & 0 & 0 & \underline{Z}_5 \end{bmatrix}.$$

Conformément à la relation (6), il vient :

$$\underline{Y}_p = \begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_3}{\Delta_{13}} & 0 & \frac{-\underline{Z}_{31}}{\Delta_{13}} & 0 & 0 \\ \Delta_{13} & \frac{\underline{Z}_5}{\Delta_{25}} & 0 & 0 & \frac{-\underline{Z}_{52}}{\Delta_{25}} \\ 0 & \Delta_{25} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\underline{Z}_{13}}{\Delta_{13}} & 0 & \frac{\underline{Z}_1}{\Delta_{13}} & 0 & 0 \\ \Delta_{13} & 0 & \Delta_{13} & \frac{1}{\underline{Z}_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_4 & 0 \\ 0 & \frac{-\underline{Z}_{25}}{\Delta_{25}} & 0 & 0 & \frac{\underline{Z}_2}{\Delta_{25}} \end{bmatrix},$$

où  $\Delta_{13} = \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 - \underline{Z}_{13} \underline{Z}_{31}$  et  $\Delta_{25} = \underline{Z}_2 \underline{Z}_5 - \underline{Z}_{25} \underline{Z}_{52}$ .

Si le circuit électrique analysé contient des bobines qui présentent deux ou plusieurs couplages magnétiques simultanés, l'inversion de la matrice  $\underline{Z}_p$  dudit circuit ne peut pas être évitée. Ça peut conduire à des calculs très importants, si le schéma a une complexité remarquable. L'utilisation des modèles présentés dans ce qui va suivre s'impose.

### 3. MODÈLES ASSOCIÉS AU COUPLAGE MAGNÉTIQUE

On convient de désigner sous le nom de „couplage exclusif“ le bipôle constitué par la partie couplage magnétique qui revient à une paire de bobines couplées par induction. La figure 1 montre les deux cas possibles : le couplage positif (fig. 1.a) et le couplage négatif (fig. 1.b).

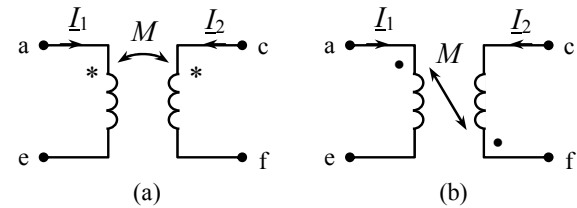


Fig. 1. Le bipôle „couplage exclusif“

On suppose de plus que les inductances mutuelles de la bobine 1 vers la bobine 2 et réciproquement ont une valeur commune :  $M = |L_{12}| = |L_{21}|$ .

Les potentiels et les courants des accès vérifient les équations suivantes

$$\begin{aligned} V_a - V_e &= \pm j\omega M I_2 \\ V_c - V_f &= \pm j\omega M I_1 \end{aligned} \quad (7)$$

Où on met le signe „+“ si le couplage est positif et le signe „-“ si le couplage est négatif. Un modèle qui comporte deux sources de tension liées [5] peut être associé aux équations (7) et donc au bipôle (fig. 2). Ce modèle élimine la présence du couplage magnétique, mais il ne se prête pas à la méthode nodale, parce que les courants de court-circuit ont des valeurs infinies pour les deux branches.

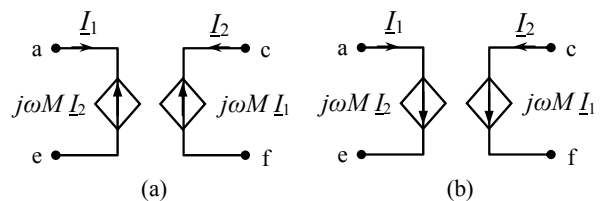


Fig. 2. Modèle qui comporte deux sources de tension liées. (a) – couplage positif ; (b) – couplage négatif

En partant des équations (7), le courant d'une porte s'exprime facilement en fonction de la différence de potentiel existante entre les bornes de la porte opposée :

$$I_1 = \frac{\pm 1}{j\omega M} (V_c - V_f), \quad (8)$$

$$I_2 = \frac{\pm 1}{j\omega M} (V_a - V_e).$$

Ça permet à construire un modèle qui implique deux sources de courant liées (fig. 3) et qui n'a pas de couplages magnétiques.

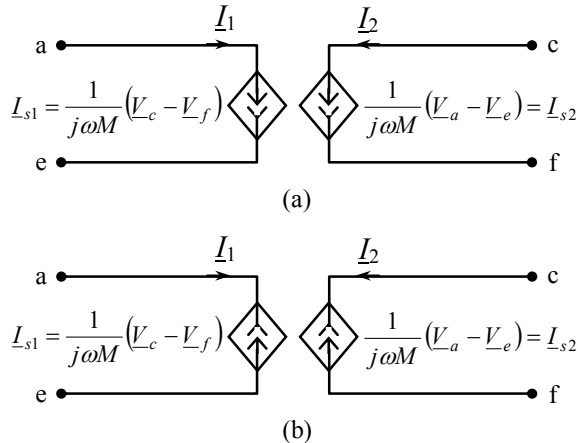


Fig. 3. Modèle qui comporte deux sources de courant liées. (a) – couplage positif ; (b) – couplage négatif

Ce dernier modèle est adéquat pour bâtir un algorithme associé à la méthode nodale, dédié aux circuits qui présentent des bobines couplées par induction.

#### 4. MODÈLE SÉRIE AVEC SOURCES LIÉES

Si deux bobines sont couplées par induction (soit qu'elles soient enroulées sur le même noyau, soit qu'elles soient seulement à proximité l'une de l'autre), les équations qui décrivent le quadripôle constitué par les deux bobines (fig. 4) sont

$$V_a - V_b = \pm j\omega M I_2 + j\omega L_1 I_1, \quad (9)$$

$$V_c - V_d = \pm j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2,$$

où  $L_1, L_2$  sont les inductances propres des deux bobines et  $M$  est l'inductance mutuelle en valeur absolue. Ces équations supposent que les relations liant flux et courants sont linéaires, que le couplage magnétique est réciproque, qu'il n'y a ni pertes ni capacités parasites. La double flèche pointillée indique le cas où le couplage est négatif.

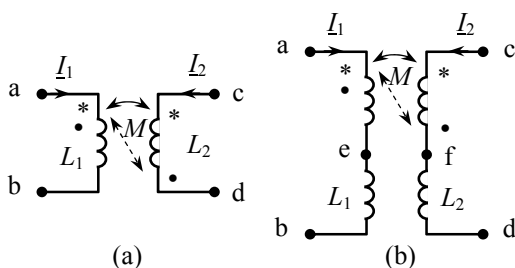


Fig. 4. Bobines couplées et schéma équivalent

On peut écrire

$$V_a - V_b = V_a - V_e + V_e - V_b, \quad (10)$$

$$V_c - V_d = V_c - V_f + V_f - V_d,$$

puis

$$V_e - V_b = j\omega L_1 I_1, \quad (11)$$

$$V_f - V_d = j\omega L_2 I_2,$$

d'où le schéma équivalent (fig. 4.b) qui correspond aux équations (9), (10), (11) et (7).

En utilisant le modèle présenté à la figure 3, le schéma équivalent (fig. 4.b) va conduire vers un modèle série (fig. 5) qui suppose deux sources de courant liées, mais aucun couplage magnétique.

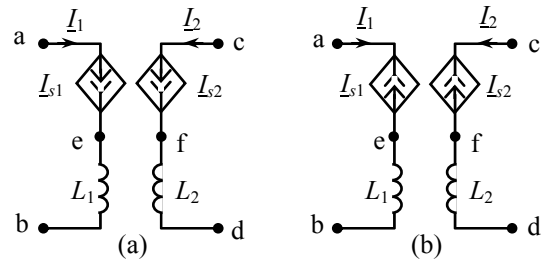


Fig. 5. Modèle série avec sources de courant liées. (a) – couplage positif ; (b) – couplage négatif

Dans un schéma donné, toutes les paires de bobines couplées peuvent être substituées par des modèles série équivalents. L'application de la première loi de Kirchhoff pour  $(n-1)$  nœuds et pour les bornes des „couplages exclusifs“ conduit au système d'équations qui permet le calcul des potentiels. Le nombre des potentiels inconnus peut être reculé, si on positionne les éléments série d'une branche couplée de la manière où une borne du „couplage exclusif“ va se superposer à un nœud du schéma électrique équivalent.

Les potentiels étant calculés, on trouve facilement les courants des branches, sans avoir besoin d'une inversion de matrice.

On prend pour exemple le pont Carey-Foster [1] qui est représenté à la figure 6 ; les éléments inconnus sont  $R_6, C_7$  et les éléments de réglage  $R_5$  et  $M$ . Le pont se trouve à l'équilibre si le courant dans le galvanomètre  $G$  est nul.

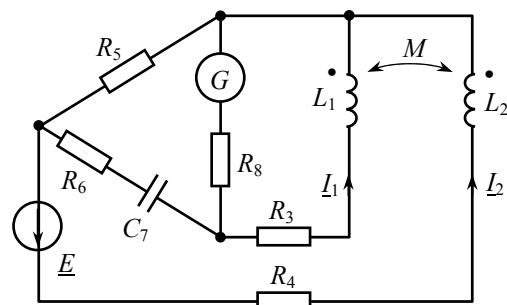


Fig. 6. Le pont Carey-Foster

Un schéma équivalent sans couplage est facilement obtenu (fig. 7) en utilisant le modèle série avec sources de courant liées. Les notations sont les suivantes :

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{R_3 + j\omega L_1}, \quad \underline{Y}_2 = \frac{1}{R_4 + j\omega L_2},$$

$$\underline{Y}_5 = \frac{1}{R_5}, \quad \underline{Y}_6 = \frac{1}{R_6 + (j\omega C_7)^{-1}}, \quad \underline{Y}_8 = \frac{1}{R_8},$$

$$\underline{I}_{s1} = \frac{1}{j\omega M}(V_4 - V_1), \quad \underline{I}_{s2} = \frac{1}{j\omega M}(V_1 - V_3).$$

Si on pose  $\underline{Y}_M = (j\omega M)^{-1}$ , avec  $M > 0$ , le système d'équations associé à la méthode nodale

$$\underline{V}_1(\underline{Y}_5 + \underline{Y}_8) - \underline{V}_2 \underline{Y}_8 = \underline{Y}_M(\underline{V}_4 - \underline{V}_1) - \underline{Y}_M(\underline{V}_1 - \underline{V}_3),$$

$$\underline{V}_2(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_6 + \underline{Y}_8) - \underline{V}_1 \underline{Y}_8 - \underline{V}_3 \underline{Y}_1 = 0,$$

$$\underline{V}_3 \underline{Y}_1 - \underline{V}_2 \underline{Y}_1 = -\underline{Y}_M(\underline{V}_4 - \underline{V}_1),$$

$$\underline{V}_4 \underline{Y}_2 - \underline{E} \underline{Y}_2 = \underline{Y}_M(\underline{V}_1 - \underline{V}_3)$$

est obtenu d'une manière directe, par l'inspection visuelle du schéma. Ce système a comme solutions les potentiels  $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$  et  $\underline{V}_4$ .

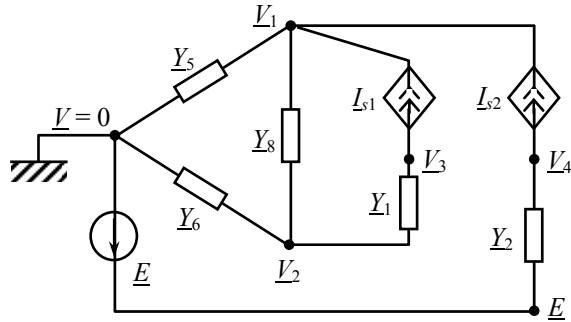


Fig. 7. Schéma équivalent du pont Carey-Foster

L'équilibre du pont impose  $\underline{V}_1 = \underline{V}_2$ , d'où il vient

$$\begin{bmatrix} 0 & -\underline{Y}_8 & -\underline{Y}_M & -\underline{Y}_M \\ 0 & \underline{Y}_1 + \underline{Y}_6 + \underline{Y}_8 & -\underline{Y}_1 & 0 \\ 0 & -\underline{Y}_1 & \underline{Y}_1 & \underline{Y}_M \\ \underline{E} \underline{Y}_2 & 0 & \underline{Y}_M & \underline{Y}_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{Y}_5 + \underline{Y}_8 + 2\underline{Y}_M & 0 & -\underline{Y}_M & -\underline{Y}_M \\ -\underline{Y}_8 & 0 & -\underline{Y}_1 & 0 \\ -\underline{Y}_M & 0 & \underline{Y}_1 & \underline{Y}_M \\ -\underline{Y}_M & \underline{E} \underline{Y}_2 & \underline{Y}_M & \underline{Y}_2 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, la condition d'équilibre s'écrit

$$-\underline{E} \underline{Y}_2 \underline{Y}_M [-\underline{Y}_1 \underline{Y}_6 + \underline{Y}_M(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_6 + \underline{Y}_8)] =$$

$$= -\underline{E} \underline{Y}_2 \underline{Y}_M (\underline{Y}_1 \underline{Y}_M + \underline{Y}_1 \underline{Y}_5 + \underline{Y}_8 \underline{Y}_M)$$

ou

$$\underline{Y}_6(\underline{Y}_M - \underline{Y}_1) = \underline{Y}_1 \underline{Y}_5.$$

Si on remplace les admittances par leurs expressions explicites, les éléments inconnus seront trouvés :

$$R_6 = R_5 \left( \frac{L_1}{M} - 1 \right),$$

$$C_7 = \frac{M}{R_3 R_5},$$

leur indépendance de la fréquence étant évidente.

## 5. MODÈLE PARALLÈLE AVEC SOURCES LIÉES

On considère les bobines couplées et le schéma associé (fig. 4.a). Dans le cas du couplage positif, les équations (9) conduisent aux expressions :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{V}_a - \underline{V}_b}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)} - \frac{\underline{V}_c - \underline{V}_d}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)}, \quad (12)$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{V}_c - \underline{V}_d}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)} - \frac{\underline{V}_a - \underline{V}_b}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)}.$$

Si on utilise les notations

$$\underline{I}_{L1} = \frac{\underline{V}_a - \underline{V}_b}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)}, \quad (13)$$

$$L_2$$

$$\underline{I}_{L2} = \frac{\underline{V}_c - \underline{V}_d}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)}, \quad (14)$$

$$L_1$$

et encore

$$\underline{I}_{p1} = \frac{\underline{V}_c - \underline{V}_d}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)}, \quad (15)$$

$$M$$

$$\underline{I}_{p2} = \frac{\underline{V}_a - \underline{V}_b}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)}, \quad (16)$$

$$M$$

On arrive au modèle parallèle représenté à la figure 8, où :

$$\underline{I}_{p1} = \frac{M}{L_1} \underline{I}_{L2} \quad \text{et} \quad \underline{I}_{p2} = \frac{M}{L_2} \underline{I}_{L1} \quad (17)$$

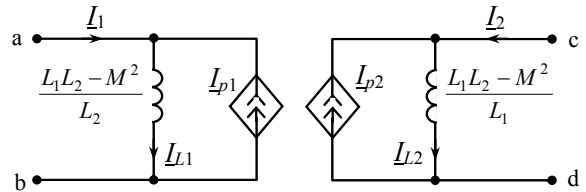


Fig. 8. Modèle parallèle associé au couplage positif

Si le couplage magnétique est négatif, les équations (9) permettent aussi l'obtention des courants du quadripôle :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{V}_a - \underline{V}_b}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)} + \frac{\underline{V}_c - \underline{V}_d}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)}, \quad (18)$$

$$L_2$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{V}_c - \underline{V}_d}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)} + \frac{\underline{V}_a - \underline{V}_b}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)}.$$

$$L_1$$

En gardant les notations (13), (14), (15) et (16), on trouve le schéma équivalent représenté à la figure 9, où les relations (17) restent valides.

L'avantage essentiel du modèle parallèle proposé consiste dans le fait que le nombre initial des nœuds reste non modifié.

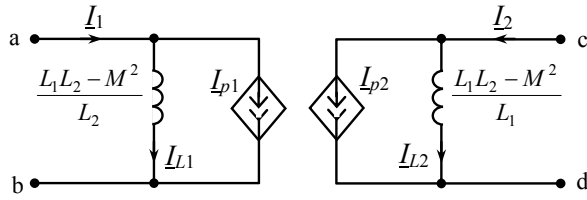


Fig. 9. Modèle parallèle associé au couplage négatif

## 6. MODÈLE AVEC TRANSFORMATEUR IDÉAL

On peut trouver un schéma équivalent à celui de la fig. 4.a, si on pose  $M = nL_2$ , où  $n$  est réel (fig. 10).

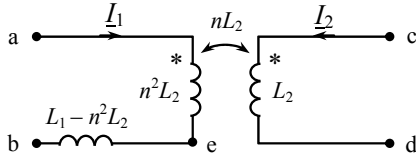


Fig. 10. Schéma équivalent d'une paire de bobines couplées

L'analyse du schéma de la figure 10 fournit les équations

$$\begin{aligned} \underline{V}_a - \underline{V}_e &= j\omega n^2 L_2 \underline{I}_1 + j\omega n L_2 \underline{I}_2, \\ \underline{V}_c - \underline{V}_d &= j\omega n L_2 \underline{I}_1 + j\omega L_2 \underline{I}_2, \end{aligned} \quad (19)$$

d'où l'on déduit

$$\underline{V}_a - \underline{V}_e = n(\underline{V}_c - \underline{V}_d) \quad (20)$$

et

$$n \underline{I}_1 = -\underline{I}_2', \quad (21)$$

si on pose

$$\underline{I}_2' = \underline{I}_2 - \frac{1}{j\omega L_2} (\underline{V}_c - \underline{V}_d) \quad (22)$$

Le schéma de la figure 10 et les relations (20), (21), (22) conduisent au modèle avec transformateur idéal, représenté à la figure 11, où  $n$  est le rapport de transformation [1,4]. Ce dernier modèle passif ne modifie pas le nombre initial de nœuds du circuit analysé.

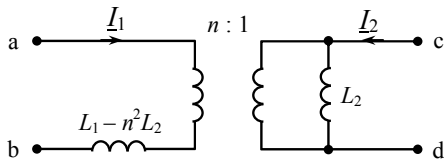


Fig. 11. Modèle avec transformateur idéal

Si  $L_1 = n^2 L_2$  le couplage est parfait et si, de plus  $L_2$  tend vers l'infini, le modèle se réduit au transformateur idéal. Physiquement, cela suppose que le flux magnétique traversant les deux bobines est identique et que la perméabilité magnétique du noyau soit infinie.

## 7. COUPLAGES MUTUELS DES SCHÉMAS TRIPHASÉS

Soit trois bobines couplées par induction (fig. 12.a) qui peuvent appartenir :

- à une charge triphasée en étoile, ou
- à une charge triphasée en triangle, ou
- à une ligne triphasée.

Si on met en évidence les inductances propres et séparément les inductances mutuelles, on arrive au schéma représenté à la figure 12.b. Il vient :

$$\begin{aligned} \underline{V}_1 - \underline{V}_{1'} &= j\omega L_1 \underline{I}_1 + \underline{V}_{1''} - \underline{V}_{1'}, \\ \underline{V}_2 - \underline{V}_{2'} &= j\omega L_2 \underline{I}_2 + \underline{V}_{2''} - \underline{V}_{2'}, \\ \underline{V}_3 - \underline{V}_{3'} &= j\omega L_3 \underline{I}_3 + \underline{V}_{3''} - \underline{V}_{3'}. \end{aligned} \quad (23)$$

Les différences de potentiel qui correspondent aux couplages magnétiques s'expriment à l'aide des inductances mutuelles :

$$\begin{aligned} \underline{V}_{1''} - \underline{V}_{1'} &= j\omega L_{12} \underline{I}_2 + j\omega L_{13} \underline{I}_3, \\ \underline{V}_{2''} - \underline{V}_{2'} &= j\omega L_{23} \underline{I}_3 + j\omega L_{21} \underline{I}_1, \\ \underline{V}_{3''} - \underline{V}_{3'} &= j\omega L_{31} \underline{I}_1 + j\omega L_{32} \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (24)$$

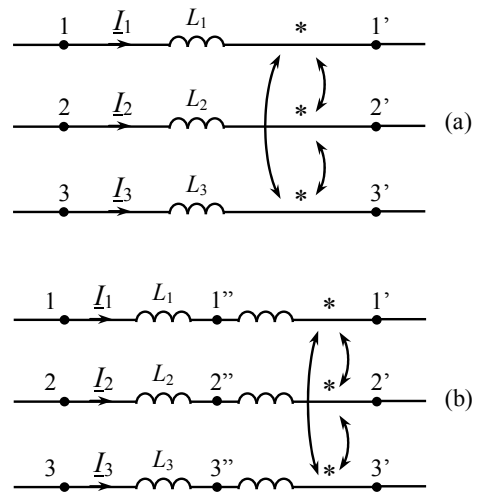


Fig. 12. Trois bobines couplées par induction

Le système d'équations (24) a comme solutions les courants des bobines couplées

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{\underline{V}_{1''} - \underline{V}_{1'}}{\underline{Z}_{1''1'}} + \underline{I}_{12} + \underline{I}_{13}, \\ \underline{I}_2 &= \frac{\underline{V}_{2''} - \underline{V}_{2'}}{\underline{Z}_{2''2'}} + \underline{I}_{23} + \underline{I}_{21}, \\ \underline{I}_3 &= \frac{\underline{V}_{3''} - \underline{V}_{3'}}{\underline{Z}_{3''3'}} + \underline{I}_{31} + \underline{I}_{32}, \end{aligned} \quad (25)$$

où les expressions des impédances associées aux couplages

$$\underline{Z}_{1''1'} = -\frac{j\omega\alpha}{L_{23}L_{32}}, \quad \underline{Z}_{2''2'} = -\frac{j\omega\alpha}{L_{31}L_{13}}, \quad \underline{Z}_{3''3'} = -\frac{j\omega\alpha}{L_{12}L_{21}} \quad (26)$$

contiennent

$$\alpha = L_{12}L_{23}L_{31} + L_{21}L_{32}L_{13}, \quad (27)$$

les courants commandés aussi

$$\underline{I}_{12} = \frac{L_{13}L_{32}}{j\omega\alpha}(V_{2''} - V_{2'}), \quad \underline{I}_{13} = \frac{L_{12}L_{23}}{j\omega\alpha}(V_{3''} - V_{3'}), \quad (28)$$

$$\underline{I}_{23} = \frac{L_{21}L_{13}}{j\omega\alpha}(V_{3''} - V_{3'}), \quad \underline{I}_{21} = \frac{L_{23}L_{31}}{j\omega\alpha}(V_{1''} - V_{1'}), \quad (29)$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{L_{32}L_{21}}{j\omega\alpha}(V_{1''} - V_{1'}), \quad \underline{I}_{32} = \frac{L_{31}L_{12}}{j\omega\alpha}(V_{2''} - V_{2'}). \quad (30)$$

Les trois bobines couplées par induction (fig. 12) admettent un modèle avec sources de courant liées; les relations (25) constituent le support analytique du modèle mentionné. La figure 13 présente la première phase dudit modèle, où les courants des sources liées ont leurs expressions (28).

Si les couplages magnétiques jouissent de réciprocité, il vient

$$L_{12} = L_{21} = M_{12}, \quad L_{23} = L_{31} = M_{23}, \quad L_{31} = L_{13} = M_{31}, \quad (31)$$

et

$$\alpha = 2M_{12}M_{23}M_{31}. \quad (32)$$

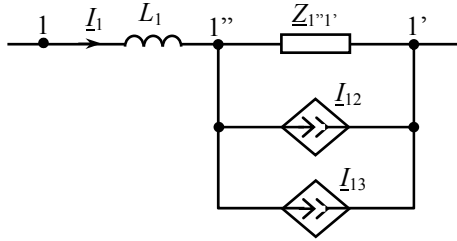


Fig. 13. Modèle monophasé avec sources de courant liées

Par conséquent, les expressions (25) deviennent

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{Z_{23}}{Z_{12}Z_{31}}(V_{1''} - V_{1'}) + \frac{1}{Z_{12}}(V_{2''} - V_{2'}) + \frac{1}{Z_{31}}(V_{3''} - V_{3'}) \right], \\ \underline{I}_2 &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{Z_{31}}{Z_{23}Z_{12}}(V_{2''} - V_{2'}) + \frac{1}{Z_{23}}(V_{3''} - V_{3'}) + \frac{1}{Z_{12}}(V_{1''} - V_{1'}) \right], \\ \underline{I}_3 &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{Z_{12}}{Z_{31}Z_{23}}(V_{3''} - V_{3'}) + \frac{1}{Z_{31}}(V_{1''} - V_{1'}) + \frac{1}{Z_{23}}(V_{2''} - V_{2'}) \right], \end{aligned} \quad (33)$$

où les impédances

$$\underline{Z}_{12} = j\omega M_{12}, \quad \underline{Z}_{23} = j\omega M_{23}, \quad \underline{Z}_{31} = j\omega M_{31} \quad (34)$$

représentent le cas particulier adéquat des expressions (26).

On peut associer aux relations (33) une forme particulière du modèle triphasé (fig. 14).

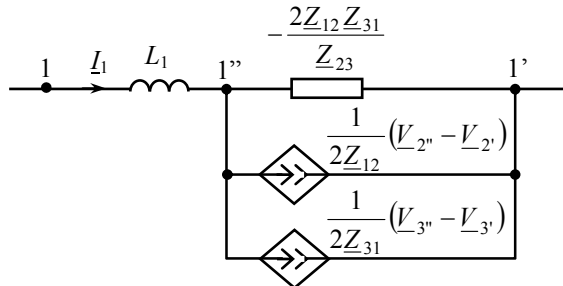


Fig. 14. Modèle monophasé associé aux coupages réciproques

Si le dispositif triphasé (charge en étoile ou en triangle, ligne triphasé) est équilibré, on a

$$\begin{aligned} L_1 &= L_2 = L_3 = L, \\ M_{12} &= M_{23} = M_{31} = M, \\ \alpha &= 2M^3 \end{aligned} \quad (35)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{1}{2\underline{Z}_M} [-(V_{1''} - V_{1'}) + V_{2''} - V_{2'} + V_{3''} - V_{3'}], \\ \underline{I}_2 &= \frac{1}{2\underline{Z}_M} [V_{1''} - V_{1'} - (V_{2''} - V_{2'}) + V_{3''} - V_{3'}], \\ \underline{I}_3 &= \frac{1}{2\underline{Z}_M} [V_{1''} - V_{1'} + V_{2''} - V_{2'} - (V_{3''} - V_{3'})], \end{aligned} \quad (36)$$

où  $\underline{Z}_M = j\omega M$ .

L'addition des relations (36) a comme résultat

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \frac{1}{2\underline{Z}_M} [V_{1''} - V_{1'} + V_{2''} - V_{2'} + V_{3''} - V_{3'}]. \quad (37)$$

Si de plus le système d'alimentation est symétrique on a

$$V_{1''} - V_{1'} + V_{2''} - V_{2'} + V_{3''} - V_{3'} = 0. \quad (38)$$

et par conséquent les relations (36) prennent la forme particulière

$$\underline{I}_1 = \frac{V_{1''} - V_{1'}}{-j\omega M}, \quad \underline{I}_2 = \frac{V_{2''} - V_{2'}}{-j\omega M}, \quad \underline{I}_3 = \frac{V_{3''} - V_{3'}}{-j\omega M}. \quad (39)$$

On arrive donc au modèle connu [3,5] associé habituellement à la situation particulière considérée (fig. 15).

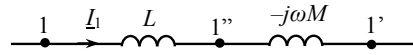


Fig. 15. Modèle „classique“

Ça valide les relations déduites et les modèles présentés dans cette section de l'épreuve.

## 8. COUPLAGES MUTUELS MULTIPLES

On considère le cas général où chaque bobine est couplée par induction avec toutes les autres bobines du circuit analysé.

Soit la bobine placée dans la branche  $k$  et couplée avec les bobines placées dans les autres branches  $m$  ( $m = \overline{1, p}; m \neq k$ ). Si on applique la stratégie proposée, le schéma initial (fig. 16.a) peut être remplacé par un schéma équivalent (fig. 16.b) où les „couplages exclusifs“ sont mis en évidence.

Pour chaque branche  $k$  du schéma équivalent, on peut écrire

$$V_{k''} - V_{k'} = j\omega L_k \underline{I}_k + V_{k''} - V_{k'}, \quad k = \overline{1, p}. \quad (40)$$

et puis

$$V_{k''} - V_{k'} = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^p \underline{Z}_{km} \underline{I}_m, \quad k = \overline{1, p}. \quad (41)$$

où  $\underline{Z}_{km} = j\omega L_{km}$  est l'impédance de couplage entre la branche  $k$  et la branche  $m$ .

Le système d'équations (41), mis sous forme matricielle

$$[V_{k^n} - V_{k'}] = [Z_{km}] \cdot [I_m], \quad (42)$$

offre les solutions

$$I_k = \frac{\Delta_{k^n k'}}{\Delta} (V_{k^n} - V_{k'}) + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^p \frac{\Delta_{km}}{\Delta} (V_{m^n} - V_{m'}), \quad k = \overline{1, p} \quad (43)$$

où  $\Delta$  est le déterminant de la matrice  $[Z_{km}]$  et  $\Delta_{k^n k'}$ ,  $\Delta_{km}$  sont les mineurs extraits de cette matrice.

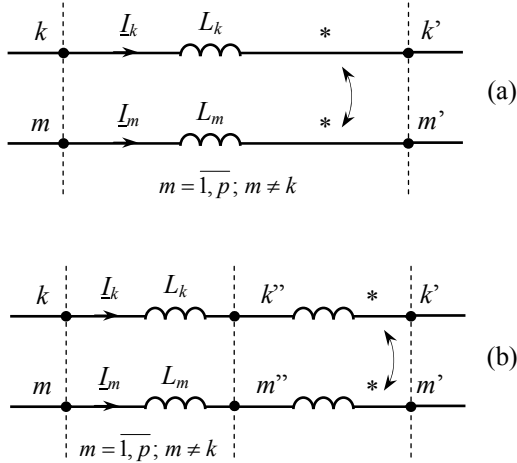


Fig. 16. Couplages mutuels multiples

Si on utilise les notations

$$Y_{k^n k'} = \frac{\Delta_{k^n k'}}{\Delta} \quad (44)$$

et

$$Y_{km} = \frac{\Delta_{km}}{\Delta} (V_{m^n} - V_{m'}), \quad m \neq k, \quad (45)$$

les courants des branches couplées s'expriment sous la forme

$$I_k = Y_{k^n k'} (V_{k^n} - V_{k'}) + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^p I_{km}, \quad k = \overline{1, p}. \quad (46)$$

qui permet à associer à chaque branche  $k$  un modèle impliquant plusieurs sources de courant liées (fig. 17).

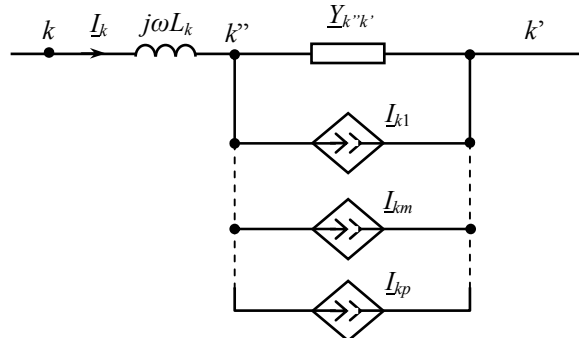


Fig. 17. Modèle général d'une branche couplée

Le modèle obtenu pour la phase d'une charge (ligne) triphasé (fig. 13) peut être considéré comme cas particulier du modèle général (fig. 17).

## 9. ALGORITHMES POUR L'ANALYSE ASSISTÉE PAR L'ORDINATEUR

L'analyse assistée par l'ordinateur exige une description systématique de la topologie du circuit, qui peut être déposée dans la mémoire du système de calcul, extraite et interprétée facilement. Une telle description est possible par la matrice de description associée au circuit donné [5,8]. La matrice de description du circuit est une forme compacte de description de la structure du circuit; elle contient cinq lignes et un nombre de colonnes égal au nombre de branches du circuit :

- la première ligne contient les index des branches;
- la deuxième contient de codes numériques associés aux éléments de chaque branche ;
- les deux lignes suivantes contiennent les index des nœuds initiaux, respectivement finals pour le courant ou la tension aux bornes de chaque branche;
- la dernière ligne contient de "zéros" pour les éléments de circuit en dipôle ou l'index de la porte paire pour chaque porte d'une source commandée ou d'une paire de bobines couplées.

Au cas des couplages magnétiques, la matrice de description du circuit initial doit être adaptée selon la méthode de modélisation des couplages, qui correspond à l'élimination des couplages.

On propose deux algorithmes d'adaptation de la matrice de description, l'un pour le cas où le schéma présente seulement des couplages simples, l'autre pour le cas général où au moins un couplage multiple existe.

### 9.1. Algorithme pour le cas des couplages simples

L'algorithme permet d'adapter la matrice de description d'un circuit avec couplages magnétiques simples, selon la méthode de modélisation série avec sources liées.

La partie de la matrice de description initiale qui se réfère à une paire de bobines couplées, soient  $p$  et  $q$  (fig. 18a), d'un circuit avec  $l$  branches, est :

$$MD_{ini} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & p & \dots & q & \dots & l \\ \dots & \dots & L_c & \dots & L_c & \dots & \dots \\ \dots & \dots & a & \dots & c & \dots & \dots \\ \dots & \dots & b & \dots & d & \dots & \dots \\ \dots & \dots & q & \dots & p & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (47)$$

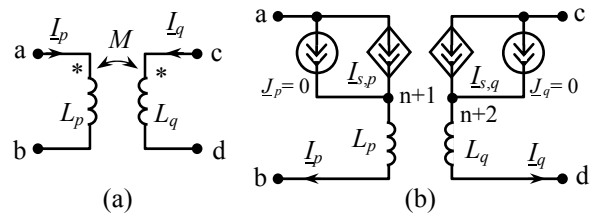


Fig. 18. Modèle d'un couplage positif simple. (a) – circuit original; (b) – modèle série.

Conformément au schéma de modélisation présenté au paragraphe 4 ci-dessus, il faut introduire deux sources de courant commandées par une tension. Afin de mieux systématiser l'algorithme de l'analyse,

on va utiliser la modélisation des portes de commande de celles-ci par de sources indépendantes de courant nul [8]. Le schéma du modèle de la paire de bobines couplées est présenté dans la figure 18b. Évidemment, on a maintenant deux nœuds supplémentaires,  $n+1$  et  $n+2$ . Par conséquent, la matrice de description du circuit (47) doit être adaptée de la manière suivante :

- Les éléments sur la position  $(2p)$ , respectivement  $(2q)$  sont remplacés par les codes des bobines non couplées;
- Le nœud initial de la branche  $p$  devient  $n+1$  (l'élément de la matrice sur la position  $(3p)$ ) lorsque le nœud initial de la branche  $q$  devient  $n+2$  (l'élément sur la position  $(3q)$ );
- Les éléments sur la position  $(5p)$ , respectivement  $(5q)$  deviennent égaux à zéro, ce qui correspond aux branches non couplées.
- On ajoute quatre colonnes supplémentaires pour chaque paire de bobines, ayant la structure présentée dans l'expression de la matrice adaptée (48) :

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & p & \dots & q & \dots & l & l+1 & l+2 & l+3 & l+4 \\ \dots & \dots & L & \dots & L & \dots & J & J & JCU & JCU \\ \dots & \dots & n+1 & \dots & n+2 & \dots & a & c & a & c \\ \dots & \dots & b & \dots & d & \dots & n+1 & n+2 & n+1 & n+2 \\ \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & l+2 & l+1 \end{bmatrix} \quad (48)$$

À partir de cette dernière matrice de description du circuit, l'analyse peut se développer d'une manière facile, à l'aide d'un logiciel basé sur la méthode nodale modifié, voir [5,6,7,8,12].

Afin d'analyser le circuit de la figure 6 à l'aide de cet algorithme, on va considérer les nœuds en sens large [6,8], conformément à la figure 19.

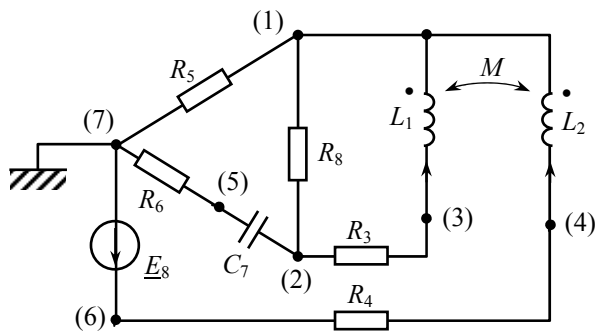


Fig. 19. Le schéma du pont Carey-Foster adapté pour l'analyse assistée par ordinateur

La matrice initiale de description du circuit est :

$$MD_{ini} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 7 & 7 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les codes de la deuxième ligne sont associés selon l'ordre de priorité de chaque élément dans un arbre normal [8] : 1 – source indépendante de tension; 2 – condensateur; 3 – résistance; 4 – bobine; 5 – source de courant liée; 6 – source de courant indépendante.

La matrice adaptée reçoit quatre colonnes et on aura deux nœuds supplémentaires. Selon l'algorithme présenté ci-dessus, cette matrice est :

$$MD_{ad} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 6 & 6 & 5 & 5 \\ 8 & 9 & 2 & 6 & 7 & 7 & 5 & 7 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6 & 8 & 9 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

Évidemment, on n'a plus besoin de bâtir le schéma du circuit modélisé sans couplages pour construire la matrice de description adaptée.

## 9.2. Algorithme pour le cas des couplages multiples

Au cas des couplages multiples, la matrice de description du circuit initial contient plusieurs lignes ayant le rôle de préciser toutes les branches couplées avec une certaine bobine. On prend pour exemple le système triphasé de la figure 12, en considérant qu'il fait partie d'un circuit avec  $l$  branches et  $n$  nœuds. La matrice de description initiale sera :

$$MD_{ini} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & l \\ L_{couplé} & L_{couplé} & L_{couplé} & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & \dots \\ 1' & 2' & 3' & \dots & \dots \\ 2 & 3 & 1 & \dots & \dots \\ 3 & 1 & 2 & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (49)$$

Conformément à la méthode de modélisation présentée au paragraphe 8, le schéma adapté (sans couplages magnétiques) aura :

- un nombre de nœuds supplémentaires égale au nombre de bobines couplées (dans ce cas – trois nœuds supplémentaires : 1", 2", 3" );
- une impédance mise en série avec chaque bobine; la valeur de l'impédance est donnée par un calcul algébrique simple, à l'aide de l'expression (44), à partir du système des équations du type (42).
- une source indépendante de courant nul mise en dérivation avec chacune des impédances ci-dessus, ayant le rôle de branche de commande en tension des sources liées (voir paragraphe 9.1);
- plusieurs sources de courant commandées par une tension mises en dérivation avec chacune des impédances mentionnées; les facteurs de transfert de ces sources sont donnés par un système d'équations de type (42).

Par conséquent, la matrice de description adaptée, pour le cas particulier choisi, sera :



$$\begin{aligned}
 MD_{ad} &= \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & l & l+1,1 & l+2,1 & l+3,1 & l+1,2 & l+2,2 & l+3,2 & l+1,3 & l+1,4 & l+2,3 & l+2,4 & l+3,3 & l+3,4 \\ 4^{(L)} & 4^{(L)} & 4^{(L)} & \dots & \dots & 6^{(J)} & 6^{(J)} & 6^{(J)} & 4^{(Y)} & 4^{(Y)} & 4^{(Y)} & 5^{(JCU)} & 5^{(JCU)} & 5^{(JCU)} & 5^{(JCU)} & 5^{(JCU)} & 5^{(JCU)} \\ 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & 1'' & 2'' & 3'' & 1' & 2' & 3' & 1'' & 1'' & 2'' & 2'' & 3'' & 3'' \\ 1'' & 2'' & 3'' & \dots & \dots & 1' & 2' & 3' & 1' & 2' & 3' & 1' & 1' & 2' & 2' & 3' & 3' \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l+2,1 & l+3,1 & l+3,1 & l+1,1 & l+1,1 & l+2,1 \end{bmatrix} \\
 & \quad (50)
 \end{aligned}$$

Bien que la dimension du schéma adapté augmente, l'absence des couplages élimine la nécessité d'inversion de la matrice des impédances et l'analyse numérique devient beaucoup plus simple.

L'efficacité de l'algorithme proposé auparavant [7] augmente par l'utilisation conjointe avec l'algorithme présenté ci-dessus, dans le cas des circuits qui contiennent plusieurs paires de bobines couplées ou des couplages multiples.

### 10. EXEMPLE

Soit le schéma représenté à la figure 20, qui sera traité à l'aide du logiciel basé sur l'algorithme décrit au paragraphe 9.2. On va vérifier le résultat par une simulation SPICE.

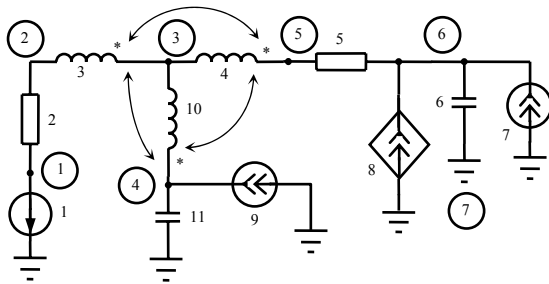


Fig. 20. Schéma d'un circuit avec couplages magnétiques multiples, présenté comme exemple

Les données d'entrée sont contenues dans le fichier de type texte montré dans la figure 21. À chaque élément de circuit et à chaque couplage magnétique on va allouer une ligne du fichier qui offre les informations essentielles :

a) pour les éléments bipolaires : type de l'élément (colonne A), index de la branche (colonne B), nœud initial (colonne C), nœud final (colonne D), valeur du paramètre exprimée en unités du système international (colonne E); la phase initiale est indiquée dans la colonne F, pour chaque source indépendante sinusoïdale;

b) pour les sources liées : type (colonne A), index de la branche commandée (colonne B), nœud initial (colonne C), nœud final (colonne D), valeur du paramètre de transfert (colonne E), index de la branche de commande (colonne F); la branche de

$$\begin{aligned}
 mdad &= \\
 &= \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \\ 1 & 6 & 7 & 7 & 6 & 5 & 11 & 8 & 11 & 7 & 5 & 11 & 11 & 11 & 6 & 6 & 6 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 1 & 1 & 3 & 5 & 5 & 6 & 7 & 7 & 7 & 4 & 4 & 8 & 9 & 10 & 8 & 9 & 10 & 8 & 8 & 9 & 9 & 10 & 10 \\ 7 & 2 & 8 & 9 & 6 & 7 & 6 & 6 & 4 & 10 & 7 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 14 & 14 & 12 & 12 & 13 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

commande doit être modélisée par une source indépendante de courant nul si la commande est faite en tension, respectivement par une source indépendante de tension nulle si la commande est donnée en courant.

c) pour les couplages mutuels : le mot clé M (colonne A), les index des bobines couplées (colonnes B et C), l'inductance mutuelle exprimée en Henry (colonne D).

La dernière ligne indique la fréquence des signaux, exprimée en Hertz.

	A	B	C	D	E	F
1	E	1	1	7	100	0
2	R	2	1	2	10	
3	L	3	3	2	1.00E-01	
4	L	4	5	3	1.00E-01	
5	R	5	5	6	10	
6	C	6	6	7	1.00E-04	
7	J	7	7	6	10	0
8	JCU	8	7	6	0.8	9
9	J	9	7	4	0	0
10	L	10	4	3	0.025	
11	C	11	4	7	1.00E-04	
12	M	3	4	5.00E-03		
13	M	3	10	2.50E-03		
14	M	4	10	2.50E-03		
15	f	50				
16						

Fig. 21. Contenu du fichier de données d'entrée

La matrice de description initiale affichée par le logiciel est :

$$\begin{aligned}
 mdini &= \\
 &= \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 6 & 7 & 7 & 6 & 5 & 11 & 8 & 11 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 5 & 5 & 6 & 7 & 7 & 7 & 4 & 4 \\ 7 & 2 & 2 & 3 & 6 & 7 & 6 & 6 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

Les codes de la deuxième ligne, octroyés par le logiciel, sont les suivants : 1 – source indépendante de tension; 5 – condensateur; 6 – résistance; 7 – bobine; 8 – source de courant commandée par une tension; 11 – source de courant indépendante.

Après la modélisation des couplages, conformément à la méthode décrite au paragraphe 8, on aura trois nœuds supplémentaires. On obtient la matrice de description :

Le système d'équations (42) prend la forme particulière :

$$\begin{bmatrix} V_8 - V_2 \\ V_9 - V_3 \\ V_{10} - V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \underline{Z}_{3,4} & \underline{Z}_{3,10} \\ \underline{Z}_{3,4} & 0 & \underline{Z}_{4,10} \\ \underline{Z}_{3,10} & \underline{Z}_{4,10} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_3 \\ I_4 \\ I_{10} \end{bmatrix}$$

si on considère  $\underline{Z}_{i,k} = j\omega M_{i,k} = \underline{Z}_{k,i} = j\omega M_{k,i}$ .

Ses solutions nous donnent les valeurs des admittances mises en série avec chaque bobine (les branches 12, 13 et 14) :

$$\underline{Y}_{12} = \frac{-\underline{Z}_{4,10}}{2\underline{Z}_{3,4}\underline{Z}_{3,10}}, \underline{Y}_{13} = \frac{-\underline{Z}_{3,10}}{2\underline{Z}_{3,4}\underline{Z}_{4,10}}, \underline{Y}_{14} = \frac{-\underline{Z}_{3,4}}{2\underline{Z}_{3,10}\underline{Z}_{4,10}}$$

ainsi que les facteurs de transfert des sources liées (les branches 18 – 23) :

$$\underline{J}_{18} = \frac{1}{2\underline{Z}_{3,4}} \cdot \underline{U}_{13}, \underline{J}_{19} = \frac{1}{2\underline{Z}_{3,10}} \cdot \underline{U}_{14}$$

$$\underline{J}_{20} = \frac{1}{2\underline{Z}_{4,10}} \cdot \underline{U}_{14}, \underline{J}_{21} = \frac{1}{2\underline{Z}_{3,4}} \cdot \underline{U}_{12}$$

$$\underline{J}_{22} = \frac{1}{2\underline{Z}_{3,10}} \cdot \underline{U}_{12}, \underline{J}_{23} = \frac{1}{2\underline{Z}_{4,10}} \cdot \underline{U}_{13}$$

De cette façon, on a obtenu un circuit équivalent sans couplages mutuels, ayant la solution fournie par le logiciel sous la forme suivante :

#### Courants des branches

I1 = 0.94418-3.0868i ==> 3.228 [A] / -72.9923 [deg]  
 I2 = -0.94418+3.0868i ==> 3.228 [A] / 107.0077 [deg]  
 I3 = 0.94418-3.0868i ==> 3.228 [A] / -72.9923 [deg]  
 I4 = 0.96292-2.7298i ==> 2.8946 [A] / -70.5698 [deg]  
 I5 = -0.96292+2.7298i ==> 2.8946 [A] / 109.4302 [deg]  
 I6 = -0.054443+3.2071i ==> 3.2075 [A] / 90.9726 [deg]  
 I7 = 10 ==> 10 [A] / 0 [deg]  
 I8 = -9.0915+0.4773i ==> 9.104 [A] / 176.9947 [deg]  
 I9 = 0 ==> 0 [A] / 0 [deg]  
 I10 = -0.018744-0.35702i ==> 0.35751 [A] / -93.0053 [deg]  
 I11 = 0.018744+0.35702i ==> 0.35751 [A] / 86.9947 [deg]

#### Tensions des branches

U1 = -100 ==> 100 [V] / 180 [deg]  
 U2 = -9.4418+30.868i ==> 32.2797 [V] / 107.0077 [deg]  
 U3 = 96.97459+29.66228i ==> 101.4097 [V] / 17.0077 [deg]  
 U4 = 86.0388+30.2364i ==> 91.1971 [V] / 19.3629 [deg]  
 U5 = -9.62923+27.2977i ==> 28.9463 [V] / 109.4302 [deg]  
 U6 = 102.0844+1.73297i ==> 102.0991 [V] / 0.97255 [deg]  
 U7 = -102.0844-1.73297i ==> 102.0991 [V] / -179.0274 [deg]  
 U8 = -102.0844-1.73297i ==> 102.0991 [V] / -179.0274 [deg]  
 U9 = -11.3644+0.596628i ==> 11.3801 [V] / 176.9947 [deg]  
 U10 = 4.948+0.60907i ==> 4.9854 [V] / 7.0174 [deg]  
 U11 = 11.3644-0.596628i ==> 11.3801 [V] / -3.0053 [deg]

#### Bilan des puissances

(puissances fournies par les sources / puissances absorbées / erreur)  
 S = 1161.9344 VA / 1161.9344 VA / 0 %  
 P = 1115.262 W / 1115.262 W / 0 %  
 Q = 326.0094 VAr / 326.0094 VAr / 1.7436e-014 %

Les résultats obtenus sont vérifiés rigoureusement par le bilan des puissances.

L'application présentée ci-dessus a été étudiée aussi à l'aide du logiciel SPICE, la version commerciale ICAP 4, à partir du schéma adapté de la figure 22, qui contient les symboles graphiques spécifiques et quelques points de mesure.

Le fichier d'entrée correspondant est :

```
D:\Craiova\couplages
*SPICE_NET
.AC LIN 2 50 51
.PRINT AC VR(1) VI(1) IR(V4) II(V4) IR(V3) II(V3)
*ALIAS V(8)=U9
*ALIAS I(V1)=ISURSA
.PRINT AC I(V3) IP(V3) V(8) VP(8)
.PRINT AC I(V1) IP(V1) V(3) VP(3)
L1 3 10 0.1
L3 8 3 0.025
C1 5 0 100U
I1 0 5 AC 10
K1 L1 L3 0.05
L2 4 3 0.1
K2 L2 L3 0.05
K3 L1 L2 0.05
G1 0 7 0 8 0.8
V3 7 5
R1 10 15 10
R2 4 5 10
I2 0 8 0
C2 8 0 100E-6
V1 0 15 AC 100
.END
```

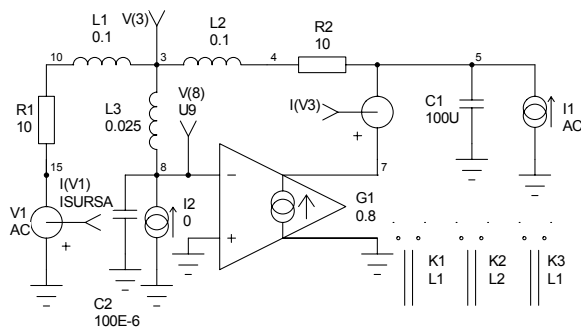


Fig. 22. Schéma SPICE du circuit exemple

On constate quelques différences d'environ 0.6 – 1 % par rapport aux résultats obtenus en utilisant notre logiciel. On présente, pour exemple, le résultat obtenu en appliquant le logiciel SPICE pour le courant de la branche 8, mesuré avec l'ampèremètre I(V3) (voir fig. 22) :

FREQUENCY	I(V3)	IP(V3)
5.000000e+001	9.183155e+000	1.767369e+002

Ces erreurs se retrouvent au bilan des puissances, ce qui nous permet d'apprécier les performances de la méthode proposée et, de même, les performances de notre logiciel dédié.

## 11. CONCLUSIONS

Il est opportun de réduire autant que possible l'ordre du système d'équations associées à un schéma électrique analysé en régime harmonique, parce que le temps de calcul nécessaire à la résolution d'un système algébrique linéaire est pratiquement proportionnel au cube du nombre d'inconnues [1]. Lorsque le nombre de branches est élevé, la méthode nodale est parmi les plus efficaces. Cette méthode consiste à calculer en premier lien l'ensemble de potentiels indépendants, toutes les autres grandeurs du circuit étant déduites par la suite sans difficultés. L'application directe de la méthode nodale est malaisée lorsque le circuit analysé suppose des couplages magnétiques. L'introduction du "couplage

exclusif" et du symbole conventionnel pour le représenter est justifiée par la simplification que cela apporte dans la dite méthode.

Le but du travail a été double : d'une part l'élaboration de nouveaux modèles pour les bobines couplées par induction, en écartant toute liaison incompatible avec la méthode nodale ; d'autre part l'élaboration d'algorithmes adéquats de haute performance permettant de résoudre aisément les schémas équivalents obtenus. On a développé un formalisme qui permet d'obtenir rapidement la solution d'un circuit donné à la voie du calcul sur l'ordinateur.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. Boite, J. Neiryck, *Théorie des réseaux de Kirchhoff*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1996;
- [2] M. Hasler, J. Neiryck, *Circuits non linéaires*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1985;
- [3] R. Suesse, U. Dimar, G. Michel, *Theoretische Elektrotechnik, Band 2*, VDI Verlag, Düsseldorf, 1996;
- [4] D. Topan, *Circuits électriques*, Ed. Universitaria, Craiova, 1996;
- [5] M. Iordache, Lucia Dumitriu, *Analiza modernă a circuitelor electrice, vol. 2*, Ed. All Educational, Bucuresti, 2000;
- [6] D. Topan, L. Mandache, *Metode de analiză în circuite electrice complexe*, Ed. Universitaria, Craiova, 2002;
- [7] L. Mandache, D. Topan, *Nouvel algorithme d'analyse basé sur la méthode nodale modifiée, adapté aux réseaux avec couplages magnétiques en régime harmonique*, Annales de l'Université de Craiova, Série Ingénierie électrique, nr. 28, 2004, pag. 20-25;
- [8] L. Mandache, *Analiza asistată de calculator a circuitelor electrice*, Ed. Sitech, Craiova, 2004;
- [9] M. Iordache, *Asupra metodei nodale modificate de analiză a circuitelor electrice, Partea a II-a : Circuite electrice de curent alternativ și circuite electrice în regim tranzitoriu*, E.E.A. Electrotehnica, 40(1992), nr. 3-4, p. 65-70;
- [10] C.W. Ho, A. Ruehli, P. Brennan, *The Modified Nodal Approach to Network Analysis*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. CAS-22, pp.504-509, 1975;
- [11] L. Mandache, D. Topan, *An extension of the modified nodal analysis method*, European Conference on Circuit Theory and Design ECCTD 2003, Kraków, pp. II-410 – II-413;
- [12] M. Badea, *Analiza asistată de calculator a circuitelor electrice*, Ed. Infomed, Craiova, 1997.