3. Aplicații ale ecuațiilor diferențiale de ordinul I

1. Suprafața de echilibru a unui lichid în rotație (integrare directă)

Problema: Un tub vertical cilindric cu raza *r* se roteşte rapid în jurul axei sale cu viteza unghiulară constantă ω. Să se determine ecuația intersecției suprafeței de rotație a lichidului cu un plan care conține axa tubului.
Variabila independentă, *x*, indică distanța unui punct față de axa de rotație (axa tubului). Funcția necunoscută, $y:[-r,r]\to R \quad y=y(x)$, reprezintă înălțimea lichidului în punctele aflate la distanța *x* de axa cilindrului şi descrie intersecția suprafeței de rotație a lichidului cu un plan ce conține axa tubului.

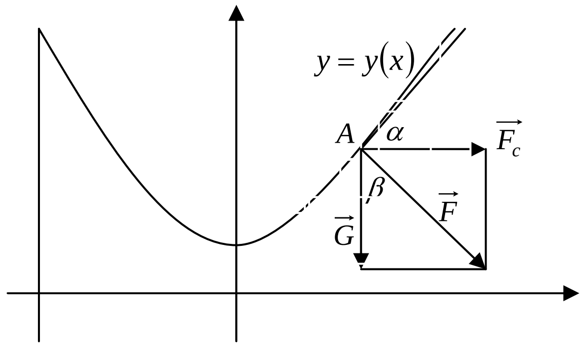

Figura 1. Suprafața de echilibru a unui lichid în rotație

Sub acțiunea forței de inerție lichidul se ridică spre pereți tubului.
Asupra punctului de masa *m* situate la distanța *x* de axă acționează două forțe: greutatea $\vec{G}=-mg\cdot\vec{j}$ şi forța centrifugă $\vec{F}_c=m\omega^2x\cdot\vec{i}$.
Deoarece viteza de rotație e constantă suprafața lichidului e stabilă şi forța rezultantă $\vec{F}$ este perpendiculară pe planul tangent la suprafața lichidului, adică unghiurile α şi β sunt egale. Rezultă că $tg\alpha=tg\beta$ adică

$$y'(x)=\frac{\omega^2}{g}\cdot x$$

Ceea ce reprezintă ecuație diferențială ce descrie curbă de rotație.

Prin integrare directă se obține $y(x)=\int\frac{\omega^2}{g}xdx=\frac{\omega^2}{2g}x^2+C$.

Deci curba de rotație este o parabolă.

Constanta *C* se determină folosind faptul că volumul lichidului este constant. Dacă înainte de începerea rotației înălțimea lichidului era *h* atunci conservarea volumului se scrie astfel

$$\pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \int_0^r y^2(x)dx = \pi\left(r \cdot C^2 + \frac{2}{3}kr^3 \cdot C + \frac{k^2 r^5}{5}\right)$$

unde $k = \frac{\omega^2}{2g}$, ceea ce reprezintă o ecuație de gradul 2 cu necunoscuta *C*.

2. Evolutia unei populații (ecuație cu variabile separabile)

a. Evoluția unei populați într-un mediu cu resurse nelimitate

Problemă: Să se descrie evoluția unei populații a cărei creştere în fiecare moment este proporțională cu valoarea sa în acel moment.

Variabila independentă este timpul *t* iar funcția necunoscută este $y:[0,+\infty) \to R$ Ea caracterizează mărimea populației ($y(t)$ reprezintă numărul de indivizi, densitatea unei culturi bacteriene etc la momentu de timp *t*).

In timpul Δt populația se modifică cu $\Delta y = k \cdot y(t) \cdot \Delta t$. Variația sa instantanee este $\Delta y / \Delta t$ deci se poate scrie

$$y'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = k \cdot y(t)$$

ceea ce reprezintă ecuația diferențială ce descrie evoluția populației. Ea este o ecuație cu variabile separabile.

Soluția singulară $y_s:[0,+\infty) \to R$, $y_s(t) = 0$ care nu convine problemei deoarece în această situație populația nu există.

Soluția generală a ecuației este $y(t) = C \cdot e^{kt}$.

Aceasta este faimoasa lege a lui Malthus care a prevăut că populația Terrei va creşte exponențial în timp ce resursele sale cresc in progresie geometrică, deci ele vor deveni insuficiente pentru toti oamenii şi războaiele sunt necesare pentru reglementarea echilibrului.

Problemă Dacă populația unei țări s-a dublat în 50 de ani, peste cât timp se va tripla, dacă viteza de creştere este proporțională cu mărimea sa?

Tinând cont că $y(t) = Ce^{kt}$ şi că $y(50) = 2y(0)$ rezultă $Ce^{50k} = 2C$, deci $k = \frac{\ln 2}{50}$.

Triplarea populației înseamnă $y(t) = 3y(0)$ ceea ce conduce la $e^{kt} = 3$, adică $t = \frac{\ln 3}{k} = \frac{50 \cdot \ln 3}{\ln 2} \approx 79$.

Deci populația se va tripla dupa 79 de ani.

Problemă: Intr-o colonie de microbi care se înmulțesc cu o viteză proporțională cu numărul lor se constată că numărul de microbi s-a dublat în 5 ore. Ce se va întâmpla după 10 ore?

Din legea de evoluție $y(t)=C\cdot e^{kt}$ şi condiția $y(5)=2y(0)$ rezultă $k=\frac{\ln 2}{5}$. Atunci $y(10)=Ce^{2\ln 2}=4C$ arată că numărul de microbi a crescut de 4 ori în 10 ore.

b. Evoluția unei populații într-un mediu cu resurse limitate

Problemă: Să se descrie evoluția unei populații într-un mediu cu resurse limitate în care populația maximă ce poate trăi are mărimea *L*, dacă mărimea ei inițială este P_0

Folosind notațiile din problema anterioară obținem problema Cauchy

$$\begin{cases} y'(t)=ky(t)\cdot(L-y(t)) \\ y(0)=P_0 \end{cases}$$

Ecuația diferențială, numită şi ecuația logistică, arată că o populație va creşte (adică $y'(t)>0$) doar dacă ea nu a atins nivelul maxim permis de mediu. Dacă mărimea ei este mai mare decât acest nivel ea va trebui să scadă până la limita acceptabilă.
Ecuația are variabile separabile.
Soluțile singulare $y_{s1}, y_{s2}:[0,\infty)\to R$, $y_{s1}(t)=0$, respectiv $y_{s2}(t)=L$ descriu situația în care populația nu există (adică $P_0=0$), respective siuația când populația inițială este la nivelul maxim admis de mediu, adică $P_0=L$ şi rămane la acest nivel.

Scrisă sub forma $\frac{y'(t)}{y(t)(L-y(t))}=k$ ecuația poate fi integrată şi conduce la $\ln\left(\frac{y(t)}{L-y(t)}\right)=Lkt+C$, adică $\frac{y(t)}{L-y(t)}=Ce^{Lkt}$. Soluția gnerală este deci $y(t)=L\frac{Ce^{Lkt}}{1+Ce^{Lkt}}$. Determinarea constantei *C* se face folosind condiția inițială.

Din $y(0)=P_0=\frac{LC}{1+C}$ rezultă $C=\frac{P_0}{1-P_0}$ deci soluția problemei este

$$y(t)=\frac{L\cdot P_0\cdot e^{Lkt}}{L-P_0+P_0e^{Lkt}}$$

Din expresia analitică a soluției se observă că $\lim_{t\to\infty} y(t)=L$, deci populația tinde să atingă valoarea maximă admisă.

3. Variația presiunii atmosferice în raport cu altitudinea (ecuație cu variabile separabile)

Problemă: Să se determine presiunea atmosferică $p=p(h)$ a unei mase volumice de aer ρ la temperature T în raport de înălțimea *h* măsurată de la nivelul mării, daca presiunea la nivelul mării este $p(0)=p_0$.

Variabila independentă este altitudinea *h* iar funcția necunoscută este presiunea atmosferică $p = p(h)$.

Ecuația fundamentală a hidrostaticii, scrisă pentru acest caz, este $p' + \rho g = 0$.

Dacă vom considera aerul la un gaz perfect obținem relația $p \cdot v = n \cdot R \cdot T$, unde *n* este numărul de moli de aer ce ocupă volumul *v*, *R* este o constantă. Rezultă că $\rho = \frac{m}{v} = \frac{m \cdot p}{n \cdot R \cdot T} = \frac{M \cdot p}{R \cdot T}$, unde *M* este masa molară a aerului. In acest caz ecuația ce descrie presiunea aerului devine $p' + \frac{M \cdot g}{R \cdot T} p = 0$. Problema Cauchy ataşată este

$$\begin{cases} p'(h) + \frac{M \cdot g}{R \cdot T(h)} p(h) = 0 \\ p(0) = p_0 \end{cases}.$$

Cazul I Dacă temperatura este constantă, ecuația se scrie $p' = -kp$, unde $k = \frac{M \cdot g}{R \cdot T}$.

In acest caz ecuația are variabile separabile. Soluția singulară $p(h) = 0$ nu convine problemei şi din soluția generală $p(h) = C \cdot e^{-kh}$ deducem, impunând condiția inițială că soluția problemei Cauchy este $p(h) = p_0 \cdot e^{-kh}$. Rezultă deci că presiunea scade exponențial în raport cu altitudinea.

Cazul II: Dacă temperatura nu este constantă dar aerul respectă legea transformărilor adiabatice $p \cdot v^{\gamma} = K$, cu $\gamma \neq 1$ dat, atunci $v = \left(\frac{K}{p}\right)^{1/\gamma}$, din relația $p \cdot v = n \cdot R \cdot T$ se obține $R \cdot T = \frac{p}{n} v = \frac{p}{n}\left(\frac{K}{p}\right)^{1/\gamma} = \frac{K^{1/\gamma} \cdot p^{1-1/\gamma}}{n}$ şi problema Cauchy devine

$$\begin{cases} p'(h) = -\frac{m \cdot g}{K^{1/\gamma}} p^{1/\gamma}(h) \overset{notatie}{=} -k_1 \cdot p^{1/\gamma}(h) \\ p(0) = p_0 \end{cases}.$$

Integrând ecuația $p^{-1/\gamma}(h) \cdot p'(h) = -k_1$ obținem $p^{1-1/\gamma}(h) = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)(-k_1 h + C)$, adică $p(h) = \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)(-k_1 h + C)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$. Din condiția inițială rezultă $C = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p_0^{(\gamma-1)/\gamma}$, deci

$$p(h) = \left[\left(p_0^{(\gamma-1)/\gamma} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} k_1 h\right)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

ceea ce arată că presiunea scade atunci când creşte altitudinea şi altitudinea maximă la care există atmosferă este $h_{\max} = \frac{\gamma \cdot p_0^{(\gamma-1)/\gamma}}{(\gamma-1)}$ care se obține din relația $p(h_{\max}) = 0$.

4. Căderea liberă (ecuație cu variabile separabile)

Problemă: Să se determine viteza unui corp în mişcare verticală sub acțiunea greutății sale şi a rezistenței aerului, dacă viteza de pornire este v_0.

Variabila independentă este timpul si funcția necunoscută este viteza $v = v(t)$.

Condiția inițială este $v(0) = v_0$. Rezistența aerului este $R=R(t)$ şi accelerația corpului este $a(t) = v'(t)$.

Legea fundamentală a dinamicii se scrie sub forma $m \cdot g - R(t) = mv'$

Cazul I: Dacă rezistența aerului este proporțională cu viteza corpului, adică $R(t) = kv(t)$**,** ecuația devine $mg - kv(t) = mv'(t)$. Notând $k_1 = m/k$ obținem problema Cauchy

$$\begin{cases} v'(t) = g - k_1 v(t) \\ v(0) = v_0 \end{cases}.$$

Ecuația diferențială, cu variabile separabile, are soluția singulară $v(t) = g/k_1$. Pentru determinarea soluției generale se scrie ecuația sub forma $\frac{v'(t)}{g - k_1 v(t)} = 1$, deci $\int \frac{v'(t)}{g - k_1 v(t)} = t + C$, adică $-\frac{1}{k_1}\ln(g - k_1 v(t)) = t + C$. De aici rezultă $v(t) = \frac{g}{k_1}\left(1 - C_1 e^{-k_1 t}\right)$. Din condiția inițială $v_0 = \frac{g}{k_1}(1 - C_1)$ rezultă $C_1 = 1 - \frac{k_1 v_0}{g}$.

In această situație viteza creşte odată cu trecerea timpului şi tinde să atingă valoarea maximă posibilă, $v_{\max} = g/k_1$.

Cazul II Dacă rezistența aerului este proporțională cu pătratul vitezei (ceea ca se întâmplă când vitezele de mişcare sunt mari) atunci $R(t) = kv^2(t)$ şi problema Cauchy devine

$$\begin{cases} v' = g\left(1 - \alpha^2 v^2(t)\right) \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

unde $\alpha^2 = k/m$. Ecuația diferențială cu variabile separabile are soluția singulară $v(t) = 1/\alpha^2$ care este o funcție constantă şi corespunde cazului când $v_0 = 1/\alpha^2$.

Soluția generală, obținută prin integrarea ecuației $\frac{v'(t)}{1-\alpha^2 v^2(t)} = g$, este dată de egalitatea $\frac{1}{2\alpha}\ln\left(\frac{1+\alpha v(t)}{1-\alpha v(t)}\right) = gt + C$. Rezultă $v(t) = \frac{1}{\alpha}\frac{e^{2\alpha\cdot(g\cdot t+C)}-1}{e^{2\alpha\cdot(g\cdot t+C)}+1}$. Valoarea lui C se determină din condițiile inițiale.

Din analiza expresiei lui v se poate deduce că viteza creşte pe măsură ce timpul trece şi tinde să atingă valoarea maximă admisă $v_{\max} = 1/\alpha = \sqrt{m/k}$.

5. Descărcarea unui condensator într-o resistență (ecuație liniară)

Fenomenul este important pentru cã apare în circuitele folosite la transmisiunile radio, de televiziune, la radare etc.

Problema : Se considerã un circuit electric format dintr-un condensator cu capacitatea C şi o rezistență R. Se cere intensitatea curentului, $i(t)$ şi diferența de potențial $v(t)$ la bornele condensatorului în funcție de momentul t la care se face mãsurarea dacã sarcina inițialã este Q.

Rezolvare : Considerãm funcțiile $i, q, v : [0, +\infty) \to R$ cate indică intensitatea, sarcina electrică şi diferența de potențial la bornele condensatorului în funcție de timpul *t*.

Intre ele existã relația $q(t) = Cv(t)$.

Intensitatea curentului electric la descãrcare este $i(t) = -q'(t)$ şi la bornele rezistenței ea satisface relația $i = \frac{v}{R}$ (legea lui Ohm).

Relațiile anterioare aratã cã acest circuit este caracterizat de problema Cauchy

$$\begin{cases} q'(t) = -\dfrac{q(t)}{C\cdot R} \\ q(0) = Q \end{cases} \qquad \text{(CR)}$$

în care $q = q(t)$ este funcția necunoscutã iar C şi R sunt constante date în problemã.

Ecuația diferențialã poate fi consideratã ca o ecuație cu variabile separabile sau ca o ecuație liniarã şi omogenã de ordinul I. Soluția problemei Cauchy este

$$q(t) = Qe^{-\frac{1}{CR}}.$$

Intensitatea curentului (la descãrcare) este $i(t) = -q'(t) = \frac{Q}{CR}e^{\frac{-t}{CR}} = I_0 e^{-t/(CR)}$ iar

$v(t) = R\cdot i(t) = \frac{Q}{C}e^{\frac{-t}{CR}}$.

Momentul începând de la care descãrcarea este practic terminatã se considerã a fi τ pentru care $i(\tau)=\frac{I_0}{100}$. Se obține $e^{\frac{-\tau}{CR}}=\frac{1}{100}$ adicã

$\tau=2\cdot C\cdot R\cdot\ln 10\approx 4,6\cdot C\cdot R$

6. Incãrcarea unui condensator printr-o rezistență în prezența unei surse de curent continuu (ecuație liniarã)

Problemã : Se considerã un circuit alcãtuit dintr-un condensator cu capacitatea C, o rezistență R şi o sursã de curent continuu având forța electromotoare constantã E. Se cere sã se determine intensitatea curentului şi diferența de potențial la bornele condensatorului în funcție de momentul la care se face mãsurarea.

Rezolvare : Se considerã funcțiile $i,q,v:[0,+\infty)\to R$ care reprezintã intensitatea curentului, sarcina condensatorului şi diferența de potențial la bornele acestuia în funcție de timp.

La încãrcarea condensatorului $i(t)=q'(t)$ iar $v(t)=\frac{q(t)}{C}$.

Legea lui Kirchoff aratã cã $i(t)=\frac{E-v(t)}{R}$, deci problema Cauchy ce caracterizeazã circuitul este

$$\begin{cases} R\cdot q'(t)+\frac{q(t)}{C}=E \\ q(0)=0 \end{cases}.$$

Soluția generalã a ecuației (liniarã şi neomogenã de ordinul I) este

$q(t)=CE+Ke^{-\frac{t}{CR}}$ iar soluția problemei Cauchy este

$$q(t)=C\cdot E\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{CR}}\right).$$

Rezultã imediat $v(t)=\frac{q(t)}{C}=E\left(1-e^{-\frac{t}{CR}}\right)$ şi $i(t)=q'(t)=\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{CR}}$.

Momentul în care condensatorul este practic încãrcat este cel la care diferența de potențial este $v(\tau)=\frac{99}{100}E$. Din $\frac{99}{100}E=E\left(1-e^{-\frac{\tau}{CR}}\right)$ rezultã

$\tau=C\cdot R\cdot\ln 100\approx 4,6\cdot C\cdot R$

7. Transformarea energiei electrice in căldură (ecuație liniară)
Problemă: Să se descrie modificarea temperaturii unui corp în raport cu mediul ambiant atunci când pentru încălzire se foloseşte energia electrică.

Variabila independentă este timpul t (măsurat în secunde) iar funcția necunoscută este temperatura corpului $\theta = \theta(t)$ presupusă aceeaşi în toate punctele corpului.

Se consideră W puterea electrică măsurată în wați, m masa corpului măsurată în grame, c căldura masică (cantitatea de căldură necesară pentru a ridica temperatura unui gram de material cu un grad), S suprafața de răcire, α coeficientul de împrăştiere (cantitatea de cădură împrăştiată de 1cm^2 într-o secundă pentru ridicarea temperaturii cu un grad)

Pentru obținerea ecuației se foloseşte principiul conservării energiei, considerând că în durata de timp Δt energia electrică este utilizată pentru a ridica temperatura corpului (cu masa m grame) cu $\Delta\theta$ în timp ce o parte din căldurăeste împrăştiată:

Relația $\dfrac{W \cdot \Delta t}{4.18} = m \cdot c \cdot \Delta\theta + \alpha \cdot S \cdot \theta \cdot \Delta t$ conduce la ecuația diferențială $\theta' + \dfrac{\alpha \cdot S}{m \cdot c} \cdot \theta = \dfrac{W}{4.18 \cdot m \cdot c}$. Se notează $B = \dfrac{\alpha \cdot S}{m \cdot c}$ şi $D = \dfrac{W}{4.18 \cdot m \cdot c}$ şi ecuația devine

Este o ecuație liniară de ordinul I, dar poate fi socotită şi ecuație cu variabile separabile. Ecuația omogenă $\theta'(t) + B \cdot \theta(t) = 0$ are soluția generală $\theta(t) = C \cdot e^{-Bt}$.

Aplicând metoda variației constantei considerăm $\theta(t) = C(t) \cdot e^{-Bt}$ şi ecuația devine $C'(t) = D \cdot e^{Bt}$. Rezultă $C(t) = \dfrac{D}{B} e^{Bt} + K$. Rezultă că soluția generală a ecuației este

$$\theta(t) = D / B + K \cdot e^{-Bt} = \frac{W}{4.18 \cdot \alpha \cdot S} + K \cdot e^{-Bt}.$$

Dacă temperatura inițială θ_0 este precizată atunci $K = \theta_0 - \dfrac{W}{4.18 \cdot \alpha \cdot S}$. In această situație temperatura corpului va fi $\theta(t) = \dfrac{W}{4.18 \cdot \alpha \cdot S}\left(1 - e^{-Bt}\right) + \theta_0 e^{-Bt}$.

Temperatura maximă a corpului va fi $\theta_{\max} = \lim\limits_{t \to \infty} \theta(t) = \dfrac{W}{4.18 \cdot \alpha \cdot S}$, indiferent de temperatura de pornire .

Dacă nu se foloseşte electricitatea pentru încălzire atunci $W=0$ şi temperatura corpului este $\theta(t) = \theta_0 e^{-Bt}$. Ea descreşte exponențial la 0.

8. Formula fundamentală a curentului alternativ (ecuație liniară)

Problemã : Se considerã un circuit în care acționeazã o forțã electromotoare datoratã unei variații de flux şi conținând o rezistențã R şi o bobinã cu

inductanța proprie L montate în serie. Sã se determine intensitatea curentului electric din circuit.

Rezolvare : Pentru a obține o variație a fluxului electric $\Phi(t)$ se considerã un cadru cu n spire de arie S mişcându-se într-un câmp magnetic cu inducția B, cadru închis printr-un circuit exterior. Acest cadru se roteşte uniform cu viteza unghularã ω.
Fluxul captat $\Phi(t)$ se descompune în douã pãrți :

- Fluxul $\Phi_1(t) = n \cdot B \cdot S \cdot \sin \omega t$ provenind de la polul nord al câmpului magnetic
- Fluxul $\Phi_2(t) = L \cdot i(t)$ generat de cadrul parcurs de curentul electric

Din relația (datã în problemã) $E(t) = -\Phi'(t)$ şi ținând cont de faptul cã $i(t) = \frac{E(t)}{R}$ se obține ecuația $i(t) = -\frac{n \cdot B \cdot S \cdot \omega}{R} \cos \omega t - \frac{L}{R} \cdot i'(t)$. Ea se scrie sub forma

$$L \cdot i'(t) + R \cdot i(t) = -n \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot \cos \omega t = E_0 \cos \omega t$$

Din rezolvarea ecuației omogene se obține $i(t) = C \cdot e^{-Rt/L}$. Aplicând metoda variației constantei obținem $C' e^{-Rt/L} + C \frac{-R}{L} e^{-RT/L} + \frac{R}{L} C e^{-Rt/L} = \frac{E_0}{L} \cos \omega t$,

deci $C'(t) = \frac{E_0}{L} e^{\frac{R}{L}t} \cdot \cos \omega t$.

Rezultă $C(t) = \frac{E_0}{L} \int e^{Rt/L} \cos \omega t dt = \frac{E_0}{R^2 + L^2\omega^2} (R \sin \omega t - L\omega \cos \omega t) e^{Rt/L} + k$.

Soluția generală a ecuației este $i(t) = \frac{E_0}{R^2 + L^2\omega^2} (R \sin \omega t - L\omega \cos \omega t) + k e^{-Rt/L}$

Aceasta are o componentã periodicã dominantã (anume $R \cos \omega t + L\omega \sin \omega t$) şi o componentã neglijabilã (anume $Re^{-\frac{R}{L}t}$) atunci când timpul t este mare. Din acest motiv curentul obținut se numeşte curent alternativ.

9. Oglinda parabolică (ecuație omogenă)

Problemă: Să se determine forma unei oglinzi care reflectă o rază luminoasă ce porneşte din origine pe o direcție paralelă cu Ox.

Graficul funcției necunoscute *y=y(x)* reprezintă oglinda în care se reflectă lumina

Raza *OM* este reflectată de oglindă pe direcția *MA*. Considerând tangenta *MB* la graficul funcției *y=y(x)*, obținem $B\hat{M}A = C\hat{M}O = M\hat{C}O$ deoarece unghiul de incidență este egal cu unghiul de reflexie.

Atunci $M\hat{O}P = 2 B\hat{M}A$, deci

$$tg\left(\widehat{MOP}\right)=\frac{y(x)}{x}=tg(2\,\widehat{BMA})=\frac{2tg\left(\widehat{BMA}\right)}{1-tg^2\left(\widehat{BMA}\right)}=\frac{2y'(x)}{1-(y'(x))^2}$$

şi se obţine ecuaţia omogenă

$$\frac{2y'}{1-(y')^2}=\frac{y}{x}$$

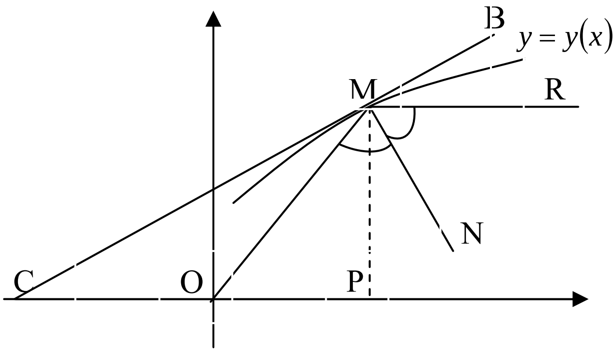

Figura 2. Oglinda parabolică

In mod obişnuit pentru rezolvarea acestei ecuaţii se foloseşte substituţia $y/x=u$, dar în acest caz calculele sunt complicate şi este mai util un artificiu de calcul datorat lui Lagrange: se notează $y'=m$ şi se derivează ecuaţia $y=x\cdot\frac{2m}{1-m^2}$.

Se obţine o nouă ecuaţie $y'=\frac{2m}{1-m^2}+2x\frac{1+m^2}{(1-m^2)^2}\cdot m'=m$ din care rezultă că $m'=\frac{m\left(m^2-1\right)}{2x}$, adică o ecuaţie cu variabile separabile.

Soluţile singulare $m(x)=0$ şi $m(x)=\pm1$ nu convin problemei pentru că în acest caz se anulează numitorul din ecuaţia iniţială.

Separând variabilele obținem $\frac{2m'}{m(m^2-1)}=\frac{1}{x}$ care, prin integrare conduce la $\ln\left(\frac{m^2-1}{m^2}\right)=\ln(kx)$, adică $\frac{m^2-1}{m^2}=kx$. Introducând expresia $x=\frac{m^2-1}{km^2}$ în ecuația $y=x\cdot\frac{2m}{1-m^2}$ se obține $y=-\frac{2}{k\cdot m}=\frac{-2}{k\cdot y'}$, adică $m=-\frac{2}{ky}$.

Din $x=\frac{m^2-1}{km^2}=\frac{(-2/(ky))^2-1}{k(-2/(ky))^2}$ rezultă $y^2=\frac{4}{k}\left(\frac{1}{k}-x\right)$ ceea ce arată că oglinda are forma unei parabole (se numeşte oglindă parabolică) al cărei focar este originea axelor de coordonate. In fapt ea reprezintă interiorul unui paraboloid de rotație.

10. Exerciții propuse

1. Se ştie că viteza de răcire a unui corp este proporțională cu diferența de temperatură între corp si mediul înconjurător.

a) Să se scrie relația care există între temperatura T şi timpul t, dacă un corp încălzit la T_0 grade este plasat într-o cameră a cărei temperatură constantă este de a grade.

b) In cât timp va scadea la 30 grade temperature unui corp încălzit la 100 grade dacă temperature camerei în care e introdus este 20 grade şi în primele 20 min corpul se răceşte la 60 grade?

R: a) $T'(t)=k(T(t)-a)$ are soluția $T(t)=(T_0-a)e^{-kt}$

b) $T_0=100,\ a=20$; din $T(20)=60$ rezultă $e^{-k}=(1/2)^{1/20}$; timpul necesar este 60 min

2. Frânarea unui disc care se roteşte uniform într-un lichid este proporțională cu viteza unghiulară .

a) Scrieți şi rezolvați ecuația care descrie modificările vitezei unghiulare în timpul rotației.

b) Care este viteza dicului dupa 3 min dacă viteza sa inițială a fost de 100 turații/min şi după un minut viteza sa a scăzut la 60 turații /min.

R: a) $\omega'(t)=-k\omega(t)$, *k>0*, are soluția $\omega(t)=C\cdot e^{-kt}$; semnul "-" ce apare în ecuație arată că miscarea este încetinită.

b) $\omega(t)=100\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^t$ deci $\omega(3)=21.6$ grade

3. Viteza de dezintegrare a radiului este proporțională cu cantitatea sa. Se ştie că după 1600 ani nu rămâne decât o jumătate din cantitatea de radiu inițială (perioada de înjumătățire este 1600 ani). Să se determine procentajul de radiu dezintegrat după 100 ani.

R: Se consideră *Q(t)* cantitatea de radiu dezintegrată sin cantitatea inițială C_0. Ecuația liniară $Q'(t)=k\cdot(C_0-Q(t))$ şi condiția inițială

$Q(0)=0$ conduc la $Q(t)=C_0(1-e^{-kt})$. Din condiția $Q(0)=2\cdot Q(1600)$ rezultă $e^{-k}=(1/2)^{1/1600}$.

Procentajul cerut este $100\cdot(Q(100)/Q(0))\%=\left(1-1/\sqrt[16]{2}\right)\cdot 100\%\approx 4.23\%$.

4. Viteza de scurgere a apei printr-o deschidere aflată pe verticală la distanța h de suprafața apei este dată de formula $v=c\sqrt{2gh}$ unde $c\approx 0.6$ şi g este accelerația gravitațională. In cât timp se va goli un rezervor cubic cu latura de 1m printr-o deschidere practicată la baza sa.

R: Se consideră $h=h(t)$ înălțimea lichidului scurs până la momentul t.

Ecuația diferențială $h'(t)=c\sqrt{2g(1-h(t))}$ şi condiția inițială $h(0)=0$ caracterizează fenomenul de curgere. Soluția problemei Cauchy este $h(t)=c\sqrt{2g}\left(1-\dfrac{c\sqrt{2g}}{2}t\right)$.Rezervorul se va goli atunci când $h(t_g)=0$, adică $t_g=\dfrac{2}{c\sqrt{2g}}\approx 0.745$ unități de timp.

5. Cantitatea de lumină absorbită de un rezervor de apă este proporțională cu cantitatea de lumină incidentă şi cu adâncimea rezervorului. Se ştie că într-un rezervor cu adâncimea de 3m apa absoarbe jumătate din catitatea de lumină inițială. Care este cantitatea de lumină care poate ajunge la o adâncime de 30m?

R: Cantitatea de lumină absorbită, $Q=Q(h)$ depinde de adâncimea la care se află observatorul. Ecuația diferențială ce caracterizează fenmenul de absorbție este $Q'(h)=k(C_0-Q(h))$ şi condiția inițială impusă este $Q(30)=Q(0)/2$.Soluția problemei Cauchy asociată este $Q(h)=Q_0\cdot\left(1-(1/2)^{h/3}\right)$. Cantitatea de lumină absorbită până la 30m este $Q(30)=Q_0(1-(1/2)^{10})$ iar cantitatea de lumină ce pătrunde la acel nivel este $Q_0\cdot(1/2)^{10}$.

6. Rezistența aerului exercitată asupra unui corp lansat cu o paraşută este proporțională cu pătratul vitezei de mişcare. Să se determine viteza limită pe care o poate atinge un corp. R: Ecuația diferențală este $mv'=mg-kv^2$ şi are soluția $v(t)=\sqrt{\dfrac{m}{k}}\cdot\dfrac{e^{2\sqrt{k/m}\cdot\cdot(g\cdot t+C)}-1}{e^{2\sqrt{k/m}\cdot\cdot(g\cdot t+C)}+1}$. Valoarea lui C se determină din condițiile inițiale. Din analiza expresiei lui v se poate deduce că viteza creşte pe măsură ce timpul trece şi tinde să atingă valoarea maximă admisă

$v_{\max}=1/\alpha=\sqrt{m/k}$

7. Baza unui rezervor de 300 l este acoperită cu un amestec de sare şi substanță insolubilă. Presupunând că viteza de dizolvarea sării este

proporțională cu diferența între concentrația instantanee şi concentrația soluției saturate (1 kg sare pentru 3 l apă) si cantitatea de apă pură dizolvă 1/3 kg sare pe minut, să se determine cantitatea de sare din soluție după o oră.

R: se notează $x(t)$ cantitatea de sare din soluție la momentul t (sare dizolvată în apă). Ecuația diferențială este $x'(t) = k\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{300}\right)$. Soluția problemei Cauchy care foloseşte condiția inițială $x(0) = 0$ este $x(t) = 100\left(1 - e^{-\frac{kt}{300}}\right)$. După o oră cantitatea de sare din soluție va fi $x(60) = 100\left(1 - e^{-\frac{k}{5}}\right)$.