Capitolul IV

CALCULUL OPERAȚIONAL

Calculul operațional se ocupă de studiul transformării lui Laplace $\mathcal{L}$ care este o aplicație de la algebra funcțiilor originale la algebra funcțiilor complexe sau reale. Operațiilor de derivare și integrare pe algebra originalilor corespund operații algebrice simple ce se aplică imaginilor.

1. TRANSFORMAREA LAPLACE. PROPRIETĂȚI

Fie $\mathcal{F}_C$ ($\mathcal{F}_R$) spațiul liniar complex (real) al funcțiilor complexe (reale) definite pe **R**.

Definiția 1. O funcție $f \in \mathcal{F}_C$ ($\mathcal{F}_R$) se numește **funcție original** dacă satisface următoarele condiții :

1) $f(t)=0$ pentru $t<0$

2) f este derivabilă pe porțiuni

3) $\exists\, M>0$ și $S_0 \geqslant 0$ astfel ca

$$|f(t)| \leqslant M_0 e^{s_0 t}.$$

Numărul S_0 se numește indice de creștere.

O funcție $f : I \to \mathbf{C}\,(\mathbf{R})$ se zice derivabilă pe porțiuni pe intervalul $I \subset \mathbf{R}$ mărginit sau nemărginit dacă pentru orice interval $[a, b] \subset I$ există o diviziune $d=(a=x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}, b=x_n)$ cu $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ astfel încît funcția f să fie derivabilă pe orice subinterval (x_{k-1}, x_k) să existe $f(x_{k-1}+0)$, $f(x_k-0)$ și $f'_d(x_{k-1})$, $f'_s(x_k)$; $k=1, \ldots, n$.

Fie $\mathcal{O}_C \subset \mathcal{F}_C$ ($\mathcal{O}_R \subset \mathcal{F}_R$) mulțimea funcțiilor original.

Teorema 1. Mulțimea $\mathcal{O}_C$ ($\mathcal{O}_R$) formează un subspațiu liniar complex (real) al spațiului liniar $\mathcal{F}_C$ ($\mathcal{F}_R$).

Fie $f, g \in \mathcal{O}_C$ ($\mathcal{O}_R$) și $\alpha, \beta \in \mathbf{C}\,(\mathbf{R})$, vom arăta că $\alpha f+\beta g \in \mathcal{O}_C$ ($\mathcal{O}_R$).

Primele două condiții sînt evidente. Să verificăm a treia condiție. Fie $M_1, M_2>0$ și $s_1, s_2 \geqslant 0$ astfel ca $|f(t)| \leqslant M_1 e^{s_1 t}$ și $|g(t)| \leqslant M_2 e^{s_2 t}$; avem

$$|\alpha f(t)+\beta g(t)| \leqslant |\alpha|\, M_1 e^{s_1 t}+|\beta|\, M_2 e^{s_2 t} \leqslant M e^{s_0 t},$$

unde

$$M=max\,(|\alpha|\, M_1, |\beta|\, M_2)>0 \text{ și } s_0=\max(s_1, s_2) \geqslant 0.$$

Teorema 2. Mulţimea $\mathcal{O}_C$ ($\mathcal{O}_R$) formează o subalgebră a algebrei $\mathcal{F}_C$ ($\mathcal{F}_R$).

Fie f, g $\in \mathcal{O}_C$ ($\mathcal{O}_R$). Funcţia produs $h=f\cdot g$, definită prin $h(t)=f(t)\,g(t)$, $t\in \mathbf{R}$, satisface evident primele două condiţii ca să fie funcţie original. Fie

$$M_1,\ M_2>0,\ s_1,\ s_2\geqslant 0$$

astfel ca

$$|f(t)|\leqslant M_1 e^{s_1 t};\quad |g(t)|\leqslant M_2 e^{s_2 t}$$

de unde rezultă că

$$|h(t)|=|f(t)\,g(t)|\leqslant M_1\cdot M_2\, e^{(s_1+s_2)t}$$

ceea ce arată că şi a treia condiţie este satisfăcută, deci $h\in \mathcal{O}_C$ ($\mathcal{O}_R$).

Funcţia original notată cu η şi definită prin

$$\eta(t)=\begin{cases} 0\ ; & t<0\\ \dfrac{1}{2}\ ; & t=0\\ 1\ ; & t>0\end{cases}$$

se numeşte *funcţia unitate.*

Proprietate. Dacă $\varphi\in\mathcal{F}_C$ ($\mathcal{F}_R$), satisface condiţiile 2 şi 3, atunci funcţia $f=\eta\cdot\varphi\in\mathcal{O}_C$ ($\mathcal{O}_R$) unde

$$f(t)=\eta(t)\cdot\varphi(t)=\begin{cases} 0 & ;\ t<0\\ \dfrac{1}{2}\varphi(0)\ ; & t=0\\ \varphi(t) & ;\ t>0\end{cases}$$

Pentru simplificarea scrierii funcţiile $\varphi\in\mathcal{F}_C$ ($\mathcal{F}_R$) înmulţite cu funcţia unitate le vom nota tot cu $\varphi\in\mathcal{O}_C$ ($\mathcal{O}_R$).

Fie $\mathcal{O}_C$ ($\mathcal{O}_R$) şi $\mathcal{C}$ — spaţiul liniar a funcţiilor complexe de variabilă complexă. Definim o aplicaţie

$$\mathcal{L}:\mathcal{O}_C(\mathcal{O}_R)\to\mathcal{C}$$

prin

$$\mathcal{L}f=F\in\mathcal{C},\ \text{oricare ar fi}\ f\in\mathcal{O}_C$$

$$F(p)=\int_0^{\infty} f(t)\,e^{-pt}\,dt,\quad p\in\mathbf{C} \tag{1}$$

Aplicaţia $\mathcal{L}$ astfel definită se numeşte *transformarea Laplace*, iar imaginea F a funcţiei original f prin aplicaţia $\mathcal{L}$ se numeşte *imaginea după Laplace a funcţieie f* sau *transformata Laplace*, a funcţiei f.

Teorema 3. Dacă $F(p)=(\mathcal{L}f)(p)$, $f\in\mathcal{O}_C$ ($\mathcal{O}_R$) şi s_0 este indicele de creştere al funcţiei original f, atunci $F(p)$ este determinată în semiplanul **Re** $p>s_0$, este olomorfă în acest semiplan şi derivata sa este dată de

$$F'(p)=\int_0^{\infty}-t\,f(t)\,e^{-pt}\,dt \tag{2}$$

(se obţine derivînd sub semnul integralei).

Vom demonstra că integralele din formulele (1) şi (2) sînt absolut convergente în semiplanul $\operatorname{Re} p = s > s_0$.

Fie $M > 0$: $| f(t) | \leqslant M e^{s_0 t}$

$$\int_0^A | f(t) e^{-pt} | dt \leqslant \int_0^A | f(t) | e^{-pt} dt M \int_0^A e^{-(s-s_0)t} dt =$$

$$= \frac{M}{s - s_0} [1 - e^{-(s-S_0)A}] ;$$

unde

$$| e^{-pt} | = e^{-\operatorname{Re} pt} = e^{-st}.$$

Trecînd la limită pentru $A \to +\infty$, obţinem pentru $s > s_0$

$$\int_0^\infty | f(t) e^{-pt} dt \leqslant \frac{M}{s - s_0}$$

deci integrala $\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$ este absolut convergentă.

Dacă $f \in \mathcal{O}_C$ cu indicele de creştere s_0, atunci g definită prin $g(z) = -tf(t)$ este o funcţie original cu indicele de creştere $s_0 + \alpha$, unde $\alpha > 0$ arbitrat de mic. Într-adevăr, pornind de la dezvoltarea în serie a funcţiei h, $h(t) = e^{\alpha t}$, $\alpha > 0$ $e^{\alpha t} = 1 + \frac{\alpha}{1!} t + \frac{\alpha^2}{2!} t^2 + \ldots$, deducem pentru $t > 0$, $t < \frac{1!}{\alpha} \cdot e^{\alpha t}$, deci funcţia identică $\operatorname{id}(t) = t$ este o funcţie original cu $M = \frac{1}{\alpha}$, indicele de creştere $s_0 = \alpha$.

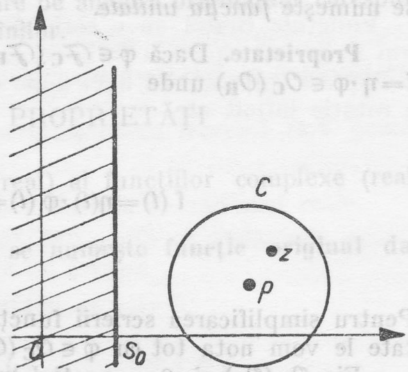

Fig. 1.

Rezultă atunci că şi integrala din (2) este absolut convergentă în semiplanul $s > s_0 + \alpha > s_0$.

Să demonstrăm că funcţia $F(p)$ este olomorfă în semiplanul $s > s_0$. Fie C un cerc cu centrul în p şi conţinut în semiplanul $s > s_0$, şi z un punct din interiorul cercului. $F(z) - F(p) = \int_0^\infty f(t) (e^{-zt} - e^{-pt}) dt$. Dezvoltăm funcţia $\varphi(z) = e^{-zt}$ după formula Taylor în punctul $z = p$. Obţinem :

$$\varphi(z) = \varphi(p) + \frac{z-p}{1!} \varphi'(p) + (z-p)^2 \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{\varphi(\xi) d\xi}{(\xi - p)^2 [\xi - z - (z - p)]}$$

deci

$$e^{-zt} - e^{-pt} = -te^{-pt} (z-p) + (z-p)^2 R(z, p, t)$$

unde

$$R(z, p, t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{e^{-\xi t}}{(\xi - p)^2 [\xi - z - (z - p)]} d\xi.$$

Obținem astfel

$$\frac{F(z)-F(p)}{z-p}=\int_0^{\infty}[-tf(t)]\cdot e^{-pt}\,dt+(z-p)\cdot\int_0^{\infty}R(z,p,t)\,f(t)\,dt$$

$$|R(z,p,t)|\frac{1}{2\pi}\oint_c\frac{|e^{-\xi t}|\cdot|d\xi|}{|\xi-p|^2\,|\xi-p-(z-p)|}\leqslant\frac{e^{-s_1 t}}{\rho(\rho-r)}$$

unde

$$\rho=|\xi-p|,\ r=|z-p|,\ \text{iar } s_1=\min_{\xi\in c}(\mathrm{Re}\,\xi)$$

Astfel

$$\left|\int_0^{\infty}R(z,p,t)\,f(t)\,dt\right|\leqslant\frac{M}{\rho(\rho-r)}\int_0^{\infty}e^{(s-s_0)t}\,dt\ \frac{M}{\rho(\rho-r)}\ \frac{1}{s_1-s_0}$$

deoarece $s_1>s_0$.

Rezultă deci

$$\lim_{z\to p}\frac{F(z)-F(p)}{z-p}=\int_0^{\infty}[-tf(t)]\cdot e^{-pt}\,dt$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Proprietate. Transformarea Laplace $\mathcal{L}$ este liniară. Această proprietate rezultă imediat din proprietatea de liniaritate a integralei prin care se definește această transformare.

Exemple: 1. Să determinăm $\mathcal{L}\eta$. Indicele de creștere s_0 a funcției unitate este $s_0=0$, deci $\mathcal{L}\eta$ este definită în semiplanul $s>0$.

$$(\mathcal{L}\eta)(p)=\int_0^{\infty}\eta(t)\,e^{-pt}dt=\int_0^{\infty}e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}\,e^{-pt}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{p}$$

$$e^{-pt}=e^{-\mathrm{Re}\,pt}=e^{-st}\ \text{și pentru } s>0,\ \lim_{t\to+\infty}e^{-pt}=0$$

2. Fie

$$f(t)=e^{\lambda t},\ \lambda=\lambda_1+i\lambda_2,\ |e^{\lambda t}|=e^{\lambda_1 t}$$

de unde rezultă că indicele de creștere al funcției $e^{\lambda t}$ este $s_0=0$ pentru $\lambda_1<0$ și $s_0=\lambda_1$ pentru $\lambda_1>0$

$$(\mathcal{L}f)(p)=\int_0^{\infty}e^{\lambda t}e^{-pt}dt=-\frac{1}{p-\lambda}\cdot e^{-(p-\lambda)t}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{p-\lambda}$$

$$|e^{-(p-\lambda)t}|=e^{-(s-\lambda_1)t}\ \text{și}\ \lim e^{-(s-\lambda_1)t}=p\ \text{pentru}\ s\geqslant s_0>\lambda_1.$$

3. Pe baza liniarității transformării $\mathcal{L}$, se deduc imaginile Laplace a funcțiilor $g_1, g_2, f_1, f_2:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g_1(t)=\sin\omega t$, $g_2(t)=\cos\omega t$, $f_1(t)=\mathrm{sh}\,\omega t$

$$f_2(t)=\mathrm{ch}\,\omega t,$$

și anume

$$(\mathcal{L}g_1)(p)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2},\quad(\mathcal{L}g_2)(p)=\frac{p}{p^2+\omega^2}$$

$$(\mathcal{L}f_1)(p)=\frac{\omega}{p^2-\omega^2},\quad(\mathcal{L}f_2)(p)=\frac{p}{p^2-\omega^2}.$$

Teorema 4. *(Teorema asemănării).*

Fie $f \in \mathcal{O}_C(\mathcal{O}_R)$, funcţia φ definită prin $\varphi(t)=f(\lambda t)$, $\lambda \in \mathbf{R}^+$, este o funcţie original ($\varphi \in \mathcal{O}_C(\mathcal{O}_R)$). Dacă $F(p)=(\mathcal{L}f)(p)$, $f \in \mathcal{O}_C(\mathcal{O}_R)$ atunci

$$(\mathcal{L}\varphi)(p)=\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right). \tag{4.3}$$

Demonstraţie. În adevăr $(\mathcal{L}\varphi)(p)=\int_0^\infty f(\lambda t)e^{-pt}dt=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{p}{\lambda}\tau}d\tau=$

$=\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$, unde am făcut schimbarea de variabilă $\lambda t=\tau$.

Teorema 5. *(Teorema întîrzierii).* Fie $f \in \mathcal{O}_C(\mathcal{O}_R)$ atunci funcţia φ, $\varphi(t)=$ $=f(t-\tau)\in \mathcal{O}_C(\mathcal{O}_R)$, $\varphi(t)=0$ pentru orice $t<\lambda$, iar

$$(\mathcal{L}\varphi)(p)=e^{-p\tau}(\mathcal{L}f)(p). \tag{4.4}$$

Demonstraţie. În adevăr $(\mathcal{L}\varphi)(p)=\int_0^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt=\int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt.$

Făcînd schimbarea de variabilă $t-\tau=\theta$, obţinem

$$\int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt=\int_0^\infty f(\theta)e^{-p(\tau+\theta)}d\theta=e^{-p\tau}\int_0^\infty f(\theta)e^{-p\theta}d\theta=$$

$$=e^{-p\tau}(\mathcal{L}f)(p).$$

Exemplu. Fie funcţia δ_h definită prin

$$\delta_h(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ \frac{1}{h} & 0<t<h \\ 0 & t>h \\ \frac{1}{2h} & t=0,\ h \end{cases}$$

Funcţia $\delta_h(t)$ o putem scrie sub forma

$$\delta_h(t)=\frac{1}{h}(\eta(t)-\eta(t-h)).$$

Funcţia $\delta_h(t)$ are proprietatea :

$$\int_{-\infty}^\infty \delta_h(t)dt=\int_0^h \frac{1}{h}dt=1.$$

Imaginea Laplace a funcţiei δ_h, este

$$(\mathcal{L}\delta_h)(p)=F_h(p)=\frac{1}{h\cdot p}(1-e^{-ph}).$$

Se observă că nu există limita

$$\lim_{h\to 0}\delta_h(t)$$

dar există limită din familia imagine şi anume avem :

$$\lim_{h\to 0}F_h(p)=1.$$

Fizicianul Dirac căutînd să găsească funcţia δ pentru care să aibă loc $(\mathscr{L}\delta)(p) = =\lim_{h\to 0} F_h(p)=1$ a dat o definiţie pentru această funcţie δ, definiţie ce nu se încadrează în teoria funcţiilor reale, şi anume:

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \infty & t=0\end{cases} \quad \text{şi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

Evident nu avem definită astfel o funcţie, dar obiectul astfel definit a fost utilizat cu mult succes în fizică teoretică.

Apariţia teoriei distribuţiilor permite ca în mod corect să fie definit obiectul δ, ca fiind o distribuţie numită *distribuţia lui Dirac*, ce se obţine ca derivata *distribuţiei Heaviside* (adică derivata în sensul distribuţiilor a funcţiei lui Heaviside).

Teorema 6. *(Teorema deplasării).* Fie $f \in \mathcal{O}_C(\mathcal{O}_R)$ cu indicele de creştere s_0, $(\mathscr{L} f)(p)=F(p)$ şi $q\in\mathbf{C}$ un număr complex. Funcţia φ, $\varphi(t)=e^{qt} f(t)$ este o funcţie original cu indicele de creştere

$$s_0+\mathbf{Re}\,q, \text{ şi } (\mathscr{L}\varphi)(p)=F(p-q). \tag{5}$$

În adevăr

$$(\mathscr{L}\varphi)(p)=\int_0^\infty f(t)e^{qt}\cdot e^{-pt}dt=\int_0^\infty f(t)\,e^{-(p-q)t}\,dt=F(p-q).$$

Funcţia $F(p-q)$ este deci olomorfă în semiplanul $\mathbf{Re}\,p>s_0+\mathbf{Re}\,q$.

Aplicaţii. Să determinăm imaginile Laplace ale funcţiilor $g_1(t)=e^{\lambda t}\sin\omega t$, $g_2(t)=e^{\lambda t}\cos\omega t$ $f_1(t)=\operatorname{sh}\omega t\cdot e^{\lambda t}$; $f_2(t)=e^{\lambda t}\operatorname{ch}\omega t$ aplicînd teorema deplasării. Avem:

$$(\mathscr{L}g_1)(p)=\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2};\quad (\mathscr{L}g_2)(p)=\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$$

$$(\mathscr{L}f_1)(p)=\frac{\omega}{(p-\lambda)^2-\omega^2};\quad (\mathscr{L}f_2)(p)=\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2-\omega^2}.$$

Teorema 7. *(Derivarea originalului).* Fie $f\in\mathcal{O}_C(\mathcal{O}_R)$ şi $(\mathscr{L}f)(p)=F(p)$. Presupunem în continuare că funcţia f şi derivatele sale pînă la ordinul care ne va fi necesar sînt funcţii original. Imaginea prin transformarea Laplace a funcţiei f' este dată de

$$(\mathscr{L}f')(p)=pF(p)-f(0) \tag{6}$$

iar imaginea Laplace a funcţiei $f^{(n)}$ este dată de

$$(\mathscr{L}f^{(n)})(p)=p^nF(p)-[p^{n-1}f(0)+p^{n-2}f'(0)+\ldots+f^{(n-1)}(0)] \tag{4.7}$$

unde

$$f^{(k)}(0)=\lim_{t\to 0} f^{(k)}(t);\ k=1,\ldots,n-1.$$

Demonstraţie.

$(\mathscr{L}f')(p)=\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt=e^{-pt}f(t)\Big|_0^\infty+p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt=-f(0)+pF(p)$ deoarece $\lim_{t\to 0} e^{-pt}f(t)=0$

$$|f(t)e^{-pt}|=|f(t)|e^{-\mathrm{Re}\,pt}\leqslant Me^{-(s-s_0)t}, \text{ iar } s<s_0$$

Din relaţia

$$(\mathcal{L}f')(p)=pF(p)-f(0),$$

înlocuind f′ succesiv cu f″, ..., $f^{(n)}$ obţinem

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}f')(p) &= p(\mathcal{L}f)(p)-f(0)\\ (\mathcal{L}f'')(p) &= p(\mathcal{L}f')(p)-f'(0)\\ (\mathcal{L}f''')(p) &= p(\mathcal{L}f'')(p)-f''(0)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (\mathcal{L}f^{(n)})(p) &= p(\mathcal{L}f^{(n-1)}(p)-f^{(n-1)}(0)\end{aligned}$$

de unde

$$(\mathcal{L}f^{(n)})(p)=p^nF(p)-[p^{n-1}f(0)+\ldots+f^{(n-1)}(0)]$$

Teorema 8. *(Derivarea imaginii).* Dacă F este imaginea lui $f\in\mathcal{O}_C$ $(\mathcal{O}_R)$ atunci

$$F^{(n)}(p)=(-1)^{(n)}(\mathcal{L}f)(p)$$

Demonstraţie. Am văzut că imaginile F a funcţiei $f\in\mathcal{O}_C$ $(\mathcal{O}_R)$ este o funcţie olomorfă în semiplanul $\operatorname{Re}p>s_0$, s_0 fiind indicele de creştere al funcţiei f, şi

$$F'(p)=\int_0^\infty -t\,f(t)\,e^{-pt}\,dt. \tag{8}$$

Funcţia φ, $\varphi(t)=t$ este o funcţie original cu indicele de creştere $\alpha>0$ arbitrar de mic, ceea ce rezultă imediat din dezvoltarea în serie a funcţiei h, $h(t)=e^{\alpha t}$ cu $\alpha>0$ arbitrar de mic

$$e^{\alpha t}=1+\frac{\alpha}{1!}t+\ldots+\frac{\alpha^n}{n!}t^n+\ldots$$

de unde pentru $t>0$, $t^n<\dfrac{n!}{\alpha^n}e^{\alpha t}$.

Funcţia $\varphi\cdot f$ este deci şi ea o funcţie original cu indicele de creştere $\alpha+s_0$. Aplicînd formula de derivare a imaginii, din aproape în aproape obţinem

$$F^{(n)}(p)=(-1)^n(\mathcal{L}f)(p) \tag{9}$$

Aplicaţii. Aplicînd această teoremă obţinem imaginile Laplace a următoarelor funcţii f_1, f_2, f_3, $f_1(t)=te^{\lambda t}$, $f_2(t)=t^ne^{\lambda t}$, $f_3(t)=\dfrac{t^n}{n!}$

$$(\mathcal{L}f_1)(p)=\frac{1}{(p-\lambda)^2};\quad (\mathcal{L}f_2)(p)=\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}};\quad (\mathcal{L}f_3)(p)=\frac{1}{p^{n+1}}.$$

Respectiv pentru funcţiile g_i, $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$,

$$g_1(t)=t\sin\omega t,\ g_2(t)=t\cos\omega t,\ g_3(t)=t\,\mathrm{sh}\,\omega t,\ g_4(t)=t\,\mathrm{ch}\,\omega t$$

$$g_5(t)=te^{\lambda t}\sin\omega t;\quad g_6(t)=t\,e^{\lambda t}\cos\omega t$$

$$(\mathcal{L}g_1)(p)=\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2};\quad (\mathcal{L}g_2)(p)=\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$$

$$(\mathcal{L}g_3)(p)=\frac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2};\quad (\mathcal{L}g_4)(p)=\frac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$$

$$(\mathcal{L}g_5)(p)=\frac{2(p-\lambda)\omega}{[(p-\lambda)^2+\omega^2]^2};\quad (\mathcal{L}g_6)(p)=\frac{(p-\lambda)^2-\omega^2}{[(p-\lambda)^2+\omega^2]^2}.$$

Teorema 9. *(Integrarea originalului).* Fie $f\in\mathcal{O}_C$ $(\mathcal{O}_R)$ cu s_0 indice de creştere şi F imaginea Laplace. Funcţia $g(t)=\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ este tot o funcţie original.

Demonstraţie. Primele două condiţii din definiţia funcţiei original sînt evident verificate.

Din $|g(t)|=\left|\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right|\leqslant\int_0^t|f(\tau)|\,d\tau\leqslant M\cdot\int_0^t e^{s_0\tau}d\tau=\frac{M}{s_0}(e^{s_0t}-1)\leqslant$ $\leqslant\frac{M}{s_0}e^{s_0t}$ rezultă că şi a treia condiţie este satisfăcută, indicele de creştere al funcţiei g fiind egal cu s_0, indicele de creştere al funcţiei f.

Teorema 10. Imaginea prin transformarea Laplace a funcţiei g este dată de relaţia

$$(\mathcal{L}g)(p)=\frac{F(p)}{p}. \tag{10}$$

Demonstraţie. Aplicăm teorema de derivare a originalului funcţiei g, observînd că $g'(t)=f(t)$, iar $g(0)=0$. Fie $G(p)=(\mathcal{L}g)(p)$, avem

$$F(p)=(\mathcal{L}f)(p)=(\mathcal{L}g')(p)=pG(p),$$

de unde

$$G(p)=(\mathcal{L}g)(p)=\frac{1}{p}F(p).$$

Fie $f\in\mathcal{O}_C$ $(\mathcal{O}_R)$ cu indicele de creştere s_0 şi $(\mathcal{L}f)(p)=F(p)$. Presupunem că $\int_0^\infty F(q)\,dq$ este convergentă. Ştim că funcţia F este olomorfă în semiplanul $\mathrm{Re}\,p>s_0$, admite deci o primitivă Φ în acest semiplan

$$\int_p^{p_1}F(q)\,dq=\Phi(p_1)-\Phi(p)$$

oricare ar fi p, p_1 cu $\mathrm{Re}\,p>s_0$. $\mathrm{Re}\,p_1>s_0$. Dacă primitiva Φ are în punctul de la ∞ un punct ordinar, convergenţa integralei de mai sus este asigurată şi în această ipoteză obţinem

$$G(p)=\int_p^\infty F(q)\,dq=\Phi(\infty)-\Phi(p).$$

Teorema 11. *(Integrarea imaginii).* Funcția G este imaginea prin transformata Laplace a funcției φ, $\varphi(t)=\frac{f(t)}{t}$ adică

$$\int_p^{\infty} F(q)\,dq=(\mathcal{L}\varphi)(p). \tag{11}$$

Demonstrație. Observăm că $G'(p)=-\Phi'(p)=-F(p)$, iar dacă notăm cu $g \in \mathcal{O}_C(\mathcal{O}_R)$ funcția pentru care $(\mathcal{L}g)(p)=G(p)$, obținem

$$-tg(t)=-f(t)$$

deci $g(t)=\frac{f(t)}{t}$.

Aplicații. Aplicînd teorema de integrare a imaginii deducem imaginile următoarelor funcții,

$$f_1(t)=\frac{\sin \omega t}{t}, \quad f_2(t)=\frac{\operatorname{sh} \omega t}{t}$$

$$(\mathcal{L}f_1)(p)=\int_p^{\infty}\frac{\omega^2}{q^2+\omega^2}\,dq=\operatorname{arctg}\frac{q}{\omega}\Big|_t^{\infty}\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{p}{\omega}$$

$$(\mathcal{L}f_2)(p)=\int_p^{\infty}\frac{\omega}{q^2-\omega^2}\,dq=\frac{1}{2}\ln\frac{q-\omega}{q+\omega}=\frac{1}{2}\ln\frac{p-\omega}{p+\omega}.$$

Teorema 12. *(Produsul a două imagini).* Fie $f, g \in \mathcal{O}_C(\mathcal{O}_R)$ cu $(\mathcal{L}f)(p)=F(p)$, $(\mathcal{L}g)(p)=G(p)$. Produsul celor două funcții imagine H, $H(p)=F(p)\cdot G(p)$ este tot o funcție imagine și anume

$$F(p)\cdot G(p)=(\mathcal{L}\varphi)(p)$$

unde

$$\varphi(t)=\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$$

Se notează

$$(fg)(t)=\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$$

și se numește produsul de convoluție a funcțiilor f și g.

Demonstrație. Avem

$$F(p)=\int_0^{\infty} f(t)\,e^{-pt}\,dt$$

deci

$$F(p)\cdot G(p)=\int_0^{\infty} f(\tau)\,e^{-p\tau}\,G(p)\,d\tau \tag{12}$$

După teorema întîrzierii, cu

$$g_1(t)=g_1(t-\tau)$$

avem

$$e^{-p\tau}\cdot G(p)=(\mathcal{L}g_1)(p)=\int_0^{\infty} g(t-\tau)\,e^{-pt}\,dt$$

deci

$$F(p)-G(p)=\int_0^{\infty}[f(\tau)\cdot\int_0^{\infty}g(t-\tau)\,e^{-pt}dt]\,d\tau=\int_0^{\infty}e^{-pt}dt\int_0^{\infty}f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$$

unde am schimbat ordinea de integrare, ceea ce este posibil f și g fiind funcții original. Ţinînd cont că $g(t-\tau)=0$ pentru $t-\tau<0$, deci pentru $\tau>t$, obținem

$$F(p)\cdot G(p)=\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau\right)e^{-pt}\,dt=(\mathcal{L}\varphi)(p).$$

Consecință. Fie funcția original

$$\varphi(t)=\int_0^{t}f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau.$$

Prin derivare obținem

$$\varphi'(t)=f(t)\,g(0)+\int_0^{t}f(\tau)\,g'(t-\tau)\,d\tau$$

și aplicînd teorema de derivare a originalului, cum $\varphi(0)=0$, obținem

$$p\cdot F(p)\cdot G(p)=(\mathcal{L}\,\varphi')(p) \qquad (13)$$

unde φ' este dată mai sus. Formula (13) este numită *formula lui Duhamel*.

Teorema 13. *(Produsul a două originale)*. Fie $f, g\in\mathcal{O}_C\,(\mathcal{O}_R)$ cu indici de creștere s_1 respectiv s_2, $(f\cdot g)\in\mathcal{O}_C\,(\mathcal{O}_R)$ și are indicele de creștere s_1+s_2 i Imaginea prin transformarea Laplace a funcției $(f\cdot g)$ este dată de formula

$$(\mathcal{L}\,(f\cdot g))\,(p)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a+i\infty}^{a+i\infty}F(q)\,G(p-q)\,dq,\quad a>s_1. \qquad (14)$$

Demonstrația acestei teoreme o vom face puțin mai tîrziu după definirea transformării inverse.

§ 2. INVERSA TRANSFORMĂRII LAPLACE. FORMULA LUI MELLIN-FOURIER

Fie $f\in\mathcal{O}_C\,(\mathcal{O}_R)$ cu indicele de creștere s_0 și $(\mathcal{L}f)\,(p)=F(p)$.

Teorema 13. În punctele de continuitate ale funcției f avem

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)\,e^{pt}\,dp,\quad a>s_0 \qquad (15)$$

iar în punctele de discontinuitate

$$\frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)\,e^{pt}\,dp,\quad a>s_0.$$

Demonstrație. Fie funcția φ,

$$\varphi(t)=\frac{1}{2}e^{-at}\,(f(t-0)+f(t+0)).$$

În punctele de continuitate ale funcției f avem $\varphi(t)=e^{-at}f(t)$.

Pe orice interval mărginit funcţia φ nu poate avea decît puncte de discontinuitate de prima speţă în număr finit (punctele în care f este discontinuă).

Funcţia φ îndeplineşte următoarele condiţii :

1. este derivabilă pe porţiuni
2. în fiecare punct de discontinuitate „t" avem

$$\varphi(t)=\frac{1}{2}(\varphi(t-0)+\varphi(t+0)).$$

3. este absolut integrabilă pe intervalul $(-\infty, +\infty)$.

Primele două proprietăţi sînt evidente. $\varphi(t)=0$ pentru $t<0$, deoarece $f \in \mathcal{O}_C(\mathcal{O}_R)$, deci vom arăta că φ e absolut integrabilă pe $(0, +\infty)$. Pe $(0, \infty)$ în punctele de continuitate ale lui φ, avem

$$|\varphi(t)|=e^{-at}|f(t)|\leqslant M\, e^{-(a-s_0)t}$$

pentru $a>s_0$;

$$\int_0^\infty M\, e^{-(a-s_0)t}\, dt$$

este convergentă, deci φ e absolut integrabilă pe $(0, \infty)$.

Pe baza celor trei proprietăţi de mai sus, funcţia φ se poate reprezenta printr-o integrală Fourier şi avem

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma\int_0^\infty f(\tau)\, e^{-a\tau}\, e^{i\sigma(t-\tau)}\, d\tau.$$

De aici obţinem

$$e^{at}\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(a+i\sigma)t}\, d\sigma\int_0^{+\infty} f(\tau)\, e^{-(a+i\sigma)\tau}\, d\tau.$$

Făcînd schimbarea de variabilă $a+i=p$, obţinem

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\, dp\int_0^\infty f(\tau)\, e^{-p\tau}\, d\tau=e^{at}\varphi(t)=\frac{1}{2}[f(t-0)+f(t+0)]$$

deci

$$\frac{1}{2}[f(t-0)+f(t+0)]=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\, e^{pt}\, dp.$$

Vom da în continuare o teoremă fără demonstraţie.

Teorema 14. Dacă funcţia $F \in \mathcal{C}$, îndeplineşte următoarele condiţii :

1. este olomorfă în semiplanul $s>s_0$, unde $p=s+i\sigma$,
2. $F(p)$ tinde uniform către zero în raport cu $\arg p$ cînd $|p|\to\infty$ pentru orice $s\geqslant a>s_0$
3. integrala

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\, dp$$

este absolut convergentă, atunci funcţia f definită prin

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\, e^{pt}\, dp$$

este o funcţie original şi $(\mathcal{L}f)(p)=F(p)$.

Cu ajutorul formulei (15) vom putea demonstra teorema cu privire la produsul a două originale.

Fie $f \in \mathcal{O}_C (\mathcal{O}_R)$ și $(\mathcal{L}f)(p) = F(p)$, conform formulei (15) avem

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q) e^{qt} dq, \quad a > s_1,$$

s_1 fiind indicele de creștere al lui $f(t)$.

Înmulțind cu $g(t)$ și aplicînd teorema deplasării obținem

$$f(t) g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q) e^{qt} g(t) dq = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i}^{a+i} F(q) \mathcal{L}^{-1} G(p-q) dq =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} G(p-q) e^{pt} dp \right) dq, \quad b > s_2 + \mathbf{Re}\,(q)$$

sau

$$f(t) g(t) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} dq \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(q) G(p-q) e^{pt} dp.$$

Se arată că se poate schimba ordinea de integrare, de unde rezultă formula (14).

Observație. Condiția $b > s_2 + \mathbf{Re}\, q$ se poate înlocui cu $b > s_2 + s_1$ iar imaginea produsului $f(t) g(t)$ va putea fi determinată în semiplanul $\mathbf{Re}\, p > s_1 + s_2$.

Teoreme de dezvoltare. Fie $f \in \mathcal{O}_C (\mathcal{O}_R)$ și $(\mathcal{L}f)(p) = F(p)$ imaginea prin transformarea Laplace. Pentru a determina funcția original f cînd se cunoaște imaginea sa folosim două teoreme numite teoreme de dezvoltare.

Teorema 15. Dacă $F(p) = \dfrac{Q(p)}{R(p)}$ este o fracție rațională, gradul numitorului fiind cu două unități mai mare decît gradul numărătorului iar numitorul $R(p)$ are rădăcinile simple $p_1, p_2, \ldots, p_n$, atunci fncția original f a cărei imagine Laplace este F, este

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q(p_k)}{R'(p_k)} e^{p_k t}. \tag{16}$$

Demonstrație. Demonstrația rezultă imediat, funcția F în condițiile enunțate descompunîndu-se sub forma

$$F(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{p - p_k}.$$

Fie γ_h un cerc cu centrul în p_h și rază suficient de mică încît în interiorul său să nu existe alt pol diferit de p_h. Avem atunci

$$\oint_{\gamma_h} F(p) dp = \sum_{k=1}^{n} a_k \oint_{\gamma_h} \frac{dp}{p - p_k} = a_h \int_{\gamma_h} \frac{dp}{p - p_h} = 2\pi i \cdot a_h.$$

Conform teoremei reziduurilor avem

$$\oint_{\gamma_h} F(p) dp = 2\pi i \,\mathbf{rez}\, F(p_h) = 2\pi i \cdot \frac{Q(p_h)}{R'(p_h)}$$

de unde rezultă că

$$a_h=\frac{Q(p_h)}{R'(p_h)}$$

deci:

$$F(p)=\sum_{k=1}^{n}\frac{Q(p_k)}{R'(p_k)}\cdot\frac{1}{p-p_k}.$$

Astfel avem formula (16).

Consecință. În cazul în care $F(p)=\frac{Q(p)}{R(p)}$ este o fracție rațională cu gradul numărătorului cu două unități mai mic decît gradul numitorului iar ecuația $R(p)=0$ are rădăcinile multiple p_k de ordin de multiplicitate λ_k, atunci funcția original f pentru care $(\mathcal{L}f)(p)=F(p)$ este dată de

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)\,e^{pt}\,dp=\sum_k \operatorname{rez} G(p_k)$$

unde

$$\operatorname{rez} G(p_k)=\frac{1}{(\lambda_{k-1})!}\left[(p-p_k)^{\lambda_k}\cdot F(p)\cdot e^{pt}\right]_{p=p_k}^{(\lambda_k-1)}$$

iar $a>\max\limits_k(\operatorname{Re}p_k)$ și $a>0$.

Formula de mai sus se obține aplicînd teorema reziduurilor funcției $G(p)=F(p)e^{pt}$ pe curba închisă $AB\Gamma B$ din figura 5,2 trecînd la limită pentru $R\to+\infty$ și ținînd cont de formula lui Mellin-Fourier.

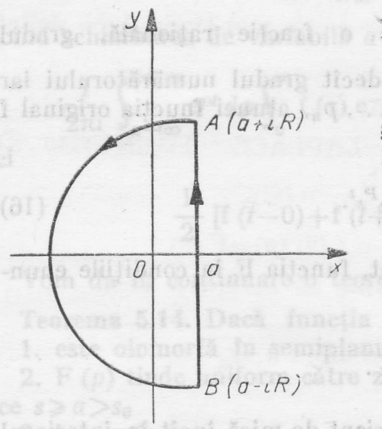

Fig. 2.

Teorema 16. Dacă $F\in\mathcal{C}$ este o funcție olomorfă în afara unui cerc cu centrul în origine și rază R a cărei dezvoltare în serie Laurent pe acest domeniu este de forma

$$F(p)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{p_k} \tag{17}$$

atunci seria

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{(k-1)!}t^{k-1} \tag{18}$$

este absolut și uniform convergentă și suma sa este o funcție original f cu $(\mathcal{L}f)(p)=F(p)$.

Demonstrație. Pe baza inegalităților lui Cauchy (făcute la capitolul de funcții complexe) avem

$$|a_k|\leqslant\frac{M}{r^n}$$

de unde $|a_k|\leqslant MR^n$, deci $\left|\frac{a_k}{(k-1)!}t^{k-1}\right|\leqslant MR\frac{(Rt)^{k-1}}{(k-1)!}$.

Termenul general al seriei considerate este în modul mai mic decît termenul general al seriei

$$MR\cdot e^{Rt}=MR\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Rt)^k}{k\,!}\,;\quad t>0$$

care se știe că este absolut și uniform convergentă pe intervalul $[0, A]$ cu A arbitrar de mare. Rezultă deci că și seria (18) este absolut si uniform convergentă pe același interval și suma sa notată cu $f(t)$ are proprietatea că

$$|f(t)|\leqslant MRe^{Rt}\,;\quad t>0$$

ceea ce arată că $f\in\mathcal{O}_C\,(\mathcal{O}_R)$.

Înmulțind seria (18) cu e^{-pt} și integrînd-o termen cu termen pe $(0, \infty)$ conform expresiei (17) obținem, că $(\mathcal{L}f)(p)=F(p)$.

Aplicații. 1. Fie $F(p)=\frac{1}{p^{n+1}}\,e^{-\frac{1}{p}}$. Știm că funcția dată se dezvoltă în serie Laurent în jurul originii ($|p|>r>0$) și că seria Laurent are forma

$$F(p)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\,!\,p^{n+k+1}}\,.$$

Funcția F satisface deci condițiile teoremei doi și deci originalul său este funcția f cu

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{n+k}}{k\,!\,(n+k)\,!}\,.$$

Notînd $t=\left(\frac{\tau}{2}\right)^2$ obținem

$$\left(\frac{\tau}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{\tau}{2}\right)^{n+2k}}{k\,!\,(n+k)\,!}=\left(\frac{\tau}{2}\right)^n J_n(\tau)$$

deci:

$$f(t)=\sqrt{t^n}\,J_n(2\sqrt{t})\ \text{ și }\ (\mathcal{L}f)(p)=\frac{1}{p^{n+1}}\,e^{-\frac{1}{p}}$$

unde J_n este funcția Bessel de speța întîi și de ordinul „n".

2. Fie expresia funcției Bessel $J_n(t)$ sub forma

$$J_n(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(t\sin\theta-n\theta)}\,d\theta$$

$$(\mathcal{L}J_n)(p)=\int_0^{\infty}J_n(t)e^{-pt}dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left(e^{-pt}\int_0^{2\pi}e^{i(t\sin\theta-n\theta)}d\theta\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(e^{-in\theta}\int_0^{\infty}e^{(i\sin\theta-p)t}\,dt\right)d\theta$$

Cum $\operatorname{Re}p\geqslant s_0>0$

$$\int_0^{\infty}e^{(i\sin\theta-p)t}\,dt=\frac{e^{(i\sin\theta-p)t}}{i\sin\theta-p}\bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{p-i\sin\theta}\,.$$

Avem

$$(\mathcal{L}J_n)(p)=\frac{1}{2\pi}\int_0^2 \frac{e^{-inθ}}{p-i\cdot\sin θ}dθ=\frac{1}{\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{z^n}{z^2+2pz-1}dz$$

unde am făcut schimbarea de variabilă $e^{-iθ}=z$. Aplicînd teorema reziduurilor ultimei integrale rezultă

$$(\mathcal{L}J_n)(p)=\frac{(-p+\sqrt{p^2+1})^n}{\sqrt{p^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}\,(p+\sqrt{p^2+1})^n},\quad n\geqslant 0.$$

Pentru $n=0$ avem

$$(\mathcal{L}J_0)(p)=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}.$$

3. Fie $f^{\nu}(t)=t^{\nu}$, $\nu\in\mathbb{C}$ cu $\mathrm{Re}\,\nu>-1$

În integrala

$$\Gamma(\nu+1)=\int_0^{\infty}x^{\nu}\cdot e^{-x}dx,\ \mathrm{Re}\nu>-1$$

făcînd schimbarea de variabilă $x=pt$, obținem

$$\frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}=\int_0^{\infty}t^{\nu}e^{-pt}dt=(\mathcal{L}f_{\nu})(p).$$

Pentru $\mathrm{Re}\nu>0$, f_{ν} este o funcție original și

$$(\mathcal{L}f_{\nu})(p)=\frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}},\quad \text{unde } f_{\nu}(t)=t_{\nu}.$$

Pentru $\nu=-\frac{1}{2}$, avem

$$(\mathcal{L}f_{-\frac{1}{2}})(p)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{p}}=\sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

unde Γ este funcția gamma a lui Euler.

§.3. APLICAȚII MATEMATICE ALE CALCULULUI OPERAȚIONAL

a) *Integrarea ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți*

Avînd ecuația

$$y^{(n)}(t)+\sum_{k=1}^{n}a_k y^{(n-k)}(t)=f(t)$$

unde a_i sînt constanți și f un original, aplicăm operatorul lui Laplace pentru a afla soluția care verifică condițiile inițiale :

$$y(0)=\alpha_0;\quad y'(0)=\alpha_1;\quad y''(0)=\alpha_2;\ \dots;\ y(0)^{(n-1)}=\alpha_{n-1}$$

şi vom avea

$$\mathcal{L}\, y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \mathcal{L} y^{(n-k)} = \mathcal{L} \mathrm{f}.$$

Notînd, ca de obicei :

$$\mathrm{F}\,(p) = (\mathcal{L}\mathrm{f})\,(p) \quad \text{şi} \quad Y\,(p) = (\mathcal{L}y)\,(p)$$

şi folosind teorema derivării originalului, obţinem :

$$p^n Y\,(p) - (\alpha_0 p^{n-1} + \alpha_1 p^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-2} p + \alpha_{n-1}) = a_1 p^{n-1} y\,(p) -$$
$$- a_1\,(\alpha_0 p^{n-2} + \alpha_1 p^{n-3} + \ldots + \alpha_{n-3} p + \alpha_{n-2}) +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ a_{n-1} p\, Y\,(p) - a_{n-2} \alpha_0 +$$
$$+ a_n Y\,(p) = \mathrm{F}\,(p)$$

care se poate scrie sub forma

$$\varphi\,(p)\; Y\,(p) = \mathrm{F}\,(p) + \mathrm{G}\,(p)$$

numită ecuaţia operaţională ataşată ecuaţiei date, unde:

$$\varphi\,(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n$$

este polinomul caracteristic ataşat ecuaţiei diferenţiale, iar :

$$G\,(p) = \alpha_0 \varphi_0\,(p) + \alpha_1 \varphi_1\,(p) + \ldots + \alpha_{n-1} \varphi_{n-1}\,(p)$$

unde φ_k sînt polinoame ce se deduc recursiv unul din altul prin relaţia :

$$\varphi_{k+1}\,(p) = \frac{\varphi_k\,(p) - \varphi_k\,(0)}{p}; \quad \text{iar } \varphi_0\,(p) = \frac{\varphi\,(p) - \varphi\,(0)}{p},$$

adică fiecare polinom $\varphi_k\,(p)$ se va obţine din procedeul prin îndepărtarea termenului liber al acestuia şi apoi prin împărţire cu variabila p.

Rezolvînd ecuaţia operatorială, găsim :

$$Y\,(p) = \frac{\mathrm{F}\,(p) + \mathrm{G}\,(p)}{\varphi\,(p)}$$

iar pentru a găsi soluţia căutată ne vom întoarce în spaţiul originalelor, unde o vom găsi prin aplicarea operatorului invers imaginii sale $Y\,(p)$, adică :

$$y\,(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathrm{F} + \mathrm{G}}{\varphi}\right)(t).$$

Observăm că dacă, valorile constantelor $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de la condiţiile iniţiale sînt lăsate arbitrare şi independente între ele, atunci $y\,(t)$ găsit mai sus va reprezenta soluţia generală a ecuaţiei date.

Exemplu : Pentru ecuaţia :

$$y''\,(t) + y'\,(t) = \cos^2 t, \text{ cu : } \alpha_0 = 1\,; \quad \alpha_1 = \frac{1}{3}\,; \quad \alpha_2 = -1$$

avem:

$$F(p)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{p}{p^2+4}\right); \quad \varphi(p)=p^3+p;$$

$$\varphi_0(p)=p^2+1; \quad \varphi_1(p)=p; \quad \varphi_2(p)=1$$

deci

$$G(p)=1\,(p^2+1)+\frac{1}{3}\,p-\cdot 1=p^2\frac{1}{3}\,p$$

iar ecuația operatorială:

$$(p^3+p)\;Y(p)=\frac{1}{2p}+\frac{p}{2\,(p^2+4)}+p^2+\frac{1}{3}\,p,$$

de unde:

$$Y(p)=\frac{1}{2p^2\,(p+1)}+\frac{1}{2\,(p^2+1)\,(p^2+4)}+\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{3\,(p^2+1)},$$

și luînd operatorul invers găsim:

$$y(t)=\frac{1}{2}\,t+\cos t-\frac{1}{2}\sin 2t.$$

b) *Integrarea sistemelor de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți*

Avînd sistemul:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(a_{i_0}{}^{(j)}\,y_j{}^{(n_{ij})}(t)+a_{i_1}{}^{(j)}\,y_j{}^{(n_{ij}-1)}(t)+\ldots+a_{i\,n_{ij-1)}^{(j)}}\cdot y'_j(t)+\right.$$

$$\left.+a_{i\,n_{ij}^{(j)}}\cdot Y_j(t)=f_i(t)\,;\quad i=\overline{1,n}\right.$$

și condițiile:

$$y_j^{(k)}(0)=\alpha_{jk}\,;\quad j=\overline{1,n}\,;\quad k=\overline{1,\,\max_{j=\text{fix}} n_{ij}},$$

aplicînd operatorul lui Laplace și observînd că fiecare ecuație este scrisă grupînd în cîte o paranteză toți termenii care conțin aceeași necunoscută y_j, vom putea scrie sistemul operatorial atașat acestui sistem diferențial sub forma:

$$\sum_{j=1}^{n}\varphi_{ij}(p)\;Y_j(p)=F_i(p)+\sum_{j=1}^{n}G_{ij}(p)\,;\; i=\overline{1,n},$$

unde φ_{ij} sînt polinoame caracteristice atașate fiecărei combinații din parantezele amintite mai sus, iar G_{ij} se deduc din acestea prin același procedeu ca și mai sus în cazul unei singure ecuații diferențiale.

Rezolvînd sistemul operatorial, prin regula lui Cramer, sau prin alte metode, găsim imaginile funcțiilor necunoscute y_j ce alcătuiesc soluția căutată, adică:

$$Y_j(p)=H_j(p),\;\text{deci}\;y_j(t)=(\mathcal{L}^{-1}H_j)(t)\,;\quad j=\overline{1,p}$$

Exemplu : Pentru sistemul :

$$\begin{cases} (x''(t)+x'(t)+x(t))+(y''(t)+2y'(t)+y(t))=1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{cu} : x(0)=0 \; ; \; x'(0)=2 \\ (x''(t)+2x(t))+(2y'(t)+2y(t))=2t \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{cu} : y(0)=1 \; ; \; y'(0)=-2. \end{cases}$$

avem

$$\varphi_{11}(p)=p^2+p+1 \; ; \qquad \varphi_{12}(p)=p^2+2p+1 \; ; \qquad F_1(p)=\frac{1}{p}$$

$$\varphi_{21}(p)=p^2+2p \; ; \qquad \varphi_{22}(p)\,(p)=2p+2 \; ; \qquad F_2(p)=\frac{2}{p^2} \; ;$$

iar :

$$G_{11}(p)=x'(0)\,(p+1)+x'(0)\cdot 1=2 \; ; \qquad G_{12}(p)=y(0)\,(p+2)+y'(0)\cdot 1=p$$

$$G_{21}(p)=x(0)\,(p+2)+x'(0)\cdot 1=2 \; ; \qquad G_{22}=y(0)\cdot 2+y'(0)\cdot 0=2$$

Sistemul operatorial atașat va fi deci :

$$\begin{cases} (p^2+p+1)\,X\,(p^2+2p+1)\,Y(p)=\dfrac{1}{p}+2+p \\ (p^2+2p)\,X(p)+(2p+2)\,Y(p)=\dfrac{2}{p^2}+2p+2, \end{cases}$$

care rezolvat ne dă

$$\begin{cases} X(p)=-\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{p+1}{p^2+2p+2} \\ Y(p)=\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{p^2+2p+2}, \end{cases}$$

și aplicînd operatorul invers, avem soluția :

$$x(t)=t+e^{-t}\sin t$$
$$y(t)=-t+e^{-t}\cos t.$$

c) *Integrarea unor ecuații diferențiale cu coeficienți variabili*

Exemple. 1) Fie ecuația

$$tx''(t)+2x'(t)=t-1 \text{ cu } x(0)=0$$

Notăm

$$\varphi_2(t)=t\cdot x''(t), \quad i(t)=t$$

Avem :

$$\mathcal{L}\varphi_2+2\mathcal{L}x'=\mathcal{L}i-\mathcal{L}\eta,$$

şi cum după teorema derivării originalului:

$$(\mathcal{L}x')(p)=p(\mathcal{L}x)(p)\cdot x(0)=pX(p)$$

iar pentru $\mathcal{L}\varphi_2$, aplicăm întîi teorema derivării imaginii şi apoi a derivării originalului:

$$(\mathcal{L}\varphi_2)(p)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathcal{L}x''=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p^2X(p)-0\cdot p-x'(0))$$

adică:

$$(\mathcal{L}\varphi_2)(p)=-2pX(p)-p^2X'(p),$$

deoarece $x'(0)$=constant.

Ecuaţia operaţională va fi în acest caz şi ca o ecuaţie diferenţială, dar de ordinul întîi şi în domeniul complex al variabilei p:

$$p^2X'(p)=-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}$$

care se mai scrie:

$$X'(p)=-\frac{1}{p^4}+\frac{1}{p^3}$$

de unde:

$$X(p)=\frac{1}{3p^3}-\frac{1}{2p^2}+C$$

şi deci:

$$x(t)=\frac{1}{6}t^2-\frac{1}{2}t+C\,\delta(t)$$

de unde se vede că trebuie luat $C=0$, deoarece funcţia δ a lui Dirac nu se anulează pentru $t=0$.

Obţinem deci soluţia:

$$x(t)=\frac{1}{6}t^2-\frac{1}{2}t$$

2) Pentru ecuaţia:

$$tx''(t)+x'(t)+x(t)=0 \text{ cu: } x(0)=\alpha_0 \text{ şi } x'(0)=\alpha_1,$$

ecuaţia operaţională ataşată va fi:

$$p^2X'(p)+(p-1)X(p)=0$$

care integrată ne dă:

$$X(p)=C\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-\frac{1}{p}}$$

unde C este o constantă arbitară, iar consultînd o listă de imagini Laplace, găsim că originalul ei este:

$$x(t)=CJ_0(2\sqrt{t})$$

unde $J_\nu(\tau)$ este funcția Bessel de ordinul ν, și de prima speță și, după cum se știe verifică ecuația diferențială de tip Bessel;

$$\tau^2 x''(\tau)+\tau x'(\tau)+(\tau^2-\nu^2)\,x(\tau)=0$$

În cazul nostru $\nu=0$, iar problema pusă nu are soluție numai dacă se dă $x'(0)=-x_0$, adică $\alpha_1=-\alpha_0$, deoarece se știe din teoria funcțiilor Bessel că $y_0(0)=-y''_0(0)=1$, și atunci vom avea: $C=\alpha_0$, deci soluția va fi:

$$y(t)=\alpha_0 J_0(2\sqrt{t})$$

3) Pentru ecuația:

$$x''(t)+tx'(t)-x(t)=0; \quad \text{cu}: \quad x(0)=0; \quad x'(0)=1.$$

ecuația operatorială este:

$$pX'(p)-(p^2-2)\,X(p)+1=0.$$

cu soluție generală

$$X(p)=\frac{1+C\,e^{\frac{p^2}{2}}}{p^2}$$

din care originalul x va corespunde unei valori concrete a constantei C, pe care o vom căuta s-o determinăm înainte de a lua operatorul invers, în speranța simplificării expresiei lui $X(p)$.

Apelînd la formula lui Mellin-Fourier:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} X(p)\,e^{pt}\,dp$$

și cum $x(0)=0$ (valoare finită) va trebui ca integrala

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} X(p)\,dp$$

să fie convergentă, deci va trebui să avem:

$$\lim_{p\to\infty} X(p)=0, \qquad (\text{cu } Jm(p)\to\infty).$$

ceea ce la noi nu se întîmplă decît pentru $C=0$ adică:

$$X(p)=\frac{1}{p^2}$$

de unde rezultă soluția:

$$x(t)=t$$

d) *Integrarea unor ecuații cu derivate parțiale cu condiții inițiale și condiții la limită date*

Fie ecuația liniară

$$a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + b \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + c \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + d \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + e \cdot u(x, t) = \varphi(x, t)$$

unde a, b, c, d, e sînt funcții de x continue pe $[0, l]$, $\varphi \in \mathcal{O}_k$ în raport cu t. Se cere soluția $u(x, t)$ a ecuației; $x \in [0, l]$, $t \in (0, \infty)$ care satisface condițiile inițiale.

$$u(x, 0) = \mathrm{f}(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \mathrm{g}(x), \quad x \in [0, l]$$

și condițiile la limită

$$\left. \begin{aligned} &\left. A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial t} + Cu \right|_{x=0} = \mathrm{h}(t) \\ &\left. D \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{E} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{F}u \right|_{x=l} = \mathrm{k}(t) \end{aligned} \right\} ; \; t \in (0, \infty)$$

A, B, C, D, E, F, sînt constante f, g, h, k funcții date, h, $\mathrm{k} \in \mathcal{O}_R$. Notăm cu

$$(\mathcal{L}\mathrm{h})(p) = H(p); \quad (\mathcal{L}\mathrm{k})(p) = K(p)$$

și

$$(\mathcal{L}\varphi)(p) = \Phi(x, p).$$

În ipoteza că soluția $u(x, t)$ a ecuației, derivatele sale parțiale de ordinul întîi și doi sînt funcții original în raport cu t, putem aplica operatorul lui Laplace, ecuației inițiale și condițiilor la limită. Avem astfel:

$$\left(a\mathcal{L} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\mathcal{L} \frac{\partial u}{\partial x} + c\mathcal{L} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d\mathcal{L} \frac{\partial u}{\partial t} + e\mathcal{L}\, u\right)(p) = \Phi(x, p)$$

$$\left.\left(A\mathcal{L} \frac{\partial u}{\partial x} + B\mathcal{L} \frac{\partial u}{\partial t} + C\mathcal{L}\, u\right)\right|_{x=0} (p) = M(p) \tag{19}$$

$$\left.\left(C\mathcal{L} \frac{\partial u}{\partial x} + D\mathcal{L} \frac{\partial u}{\partial t} + E\mathcal{L}u\right)\right|_{x=l} (p) = K(p)$$

Ținînd cont de expresia imaginii Laplace a unei funcții original și de derivarea sub semnul integralei avem:

$$(\mathcal{L}u)(p) = \int_0^\infty u(x, t)\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t = \mathrm{U}(x, p)$$

$$\left(\mathcal{L} \frac{\partial u}{\partial x}\right)(p) = \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x}\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}(x, p)$$

$$\left(\mathcal{L} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(p) = \int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t = \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^2}(x, p)$$

Pe baza teoremei de derivare a originalului avem:

$$\left(\mathcal{L}\frac{\partial u}{\partial t}\right)(p)=p\mathrm{U}(x,p)-\mathrm{f}(x)$$

$$\left(\mathcal{L}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)(p)=p^2\mathrm{U}(x,p)-(p\mathrm{f}(x)+\mathrm{g}(x)).$$

Cu acestea ecuaţia (17) devine

$$a\frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial x^2}(x,p)+b\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial x}(x,p)+(cp^2+dp+e)\,\mathrm{U}(x,p)=$$

$$=\Phi(x,p)+(cp+d)\,\mathrm{f}(x)+c\mathrm{g}(x) \qquad (20)$$

iar condiţiile la limită

$$\left.\left[A\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial x}+(Bp+c)\mathrm{U}\right]\right|_{x=0}=M(p)+B\mathrm{f}(0)$$

$$\left.\left[D\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial x}+(Ep+F)\mathrm{U}\right]\right|_{x=l}=K(p)+E\mathrm{f}(l) \qquad (21)$$

Ecuaţia (20) este o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul doi, cu coeficienţi funcţii de x şi parametrul p, a cărei integrare este în general o problemă mai simplă decît problema integrării ecuaţiei iniţiale. Fie $\mathrm{U}(x,p)$ soluţia ecuaţiei (20) care verifică condiţiile (21). Soluţia problemei iniţiale va fi originalul funcţiei U adică:

$$u(x,t)=(\mathcal{L}^{-1}\mathrm{U})\,x(t).$$

e) *Rezolvarea unor ecuaţii integrale şi a unor ecuaţii integro-diferenţiale*

1) Însăşi formula de definiţie a imaginii şi formula lui Mellin-Fourier, constituie cele mai simple ecuaţii integrale, atunci cînd se cere funcţia de sub integrală ca fiind presupusă necunoscută şi cealaltă cunoscută şi soluţia uneia e dată de formula cealaltă, adică, dacă:

$$\int \mathrm{f}(t)\,e^{-pt}dt=\mathrm{F}(p)=\text{cunoscută}\quad \mathrm{F}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\mathrm{F}(p)\,e^{tp}\,dp$$

şi reciproc, valoarea lui $\mathrm{F}(p)$ din ecuaţia a doua este dată de prima relaţie.

2) Pentru ecuaţie integrală de forma:

$$Ay(t)+B\int_0^t y(t-\tau)\,\mathrm{g}(\tau)\,d\tau=\mathrm{f}(t)$$

unde: A, B sînt constante iar g şi f funcţii cunoscute presupuse originale, avem, după aplicarea operatorului $\mathcal{L}$ şi a teoremei referitoare la produsul a două imagini:

$$AY(p)+BY(p)\mathrm{G}(p)=\mathrm{F}(p)$$

deci:

$$y(t)=(\mathcal{L}^{-1}Y)(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathrm{F}}{A+BG}\right)(t).$$

Exemplu : Soluţia ecuaţiei :

$$y(t)-2\int_0^t y(t-\tau)\sin\omega\tau\,d\tau=a\cos\omega t,$$

se obţine găsind întîi imaginea Y a soluţiei din ecuaţia operatorială :

$$\left(1-\frac{2\omega^2}{p^2+\omega^2}\right)Y(p)=a\frac{p}{p^2+\omega^2},$$

adică :

$$Y(p)=a\frac{p}{p^2-\omega^2},$$

de unde găsim :

$$y(t)=a\mathrm{ch}\omega t$$

Observaţie. Dacă funcţia g o considerăm necunoscută şi identică cu necunoscuta y a ecuaţiei, ajungem la o ecuaţie integrală de forma :

$$Ay(t)+B\int_0^t y(\tau)\,y(t-\tau)\,d\tau=f(t)$$

cu ecuaţia operatorială :

$$BY^2(p)+AY(p)-F(p)=0$$

care are în general două soluţii, cărora le corespund două originale $y_1(t)$ şi $y_2(t)$, ca soluţii ale ecuaţiei integrale de mai sus.

3) Ecuaţia :

$$y'(t)+\int_0^t \tau\cdot y(t-\tau)\,d\tau=t;\quad \text{cu } y(0)=-1$$

este integro-diferenţială, deoarece necunoscuta $y(t)$ figurează atît sub semnul derivării cît şi sub integrală.

După aplicarea operatorului $\mathcal{L}$, avem :

$$pY(p)+1+\frac{1}{p^2}\cdot Y(p)=\frac{1}{p^2}$$

de unde :

$$Y(p)=\frac{1-p^2}{1+p^3}=\frac{1-p}{1-p+p^2}$$

care se mai scrie:

$$Y(p)=\frac{\frac{1}{2}-\left(p-\frac{1}{2}\right)}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

de unde :

$$y(t)=(\mathcal{L}^{-1}Y)(t)$$

și ținînd seama de teorema deplasării, avem :

$$y(t)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{t\sqrt{3}}{2}-\cos\frac{t\cdot\sqrt{3}}{2}\right)e^{\frac{t}{2}},$$

care se poate verifica direct prin calcul că satisface ecuația dată și se observă direct că satisface și condiția inițială impusă.

Remarcăm că metoda operațională se poate aplica și unor ecuații cu derivate parțiale cu condiții inițiale și la limită date.

7) *Calculul unor integrale improprii*

Cunoscînd imaginea F a unui original f, atunci pentru aceasta se pot calcula, în unele cazuri, mai ușor integralele (presupuse convergente).

$$I_1=\int_0^\infty f(t)\,dt\,;\quad I_2=\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt\,;\quad I_3=\int_0^\infty t^n f(t)\,dt\,;\qquad n\in\mathbf{N},$$

presupunînd că domeniul de olomorfie al funcției F poate fi prelungit cu un domeniu simplu conex care să conțină originea $p=0$.

Atunci, în teorema integrării imaginii :

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-pt}\,dt=\int_0^\infty F(z)\,dz$$

putem face $p=0$ și obținem :

$$I_2=\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt=\int_0^\infty F(z)\,dz$$

Dacă teorema de mai sus o aplicăm funcției $F^{(n+1)}$, avem :

$$\int_0^\infty F^{(n+1)}(z)\,dz=\int_0^\infty (-t)^{n+1}\frac{f(t)}{t}e^{-pt}\,dt=(-1)^{n+1}\int_0^\infty t^n f(t)\,e^{-pt}\,dt$$

și pentru $p=0$, deducem :

$$I_3=\int_0^\infty t^n f(t)\,dt=(-1)^{n+1}\int_0^\infty F^{(n+1)}(z)\,dz=(-1)^{n+1}F^{(n)}(z)\Big|_0^\infty$$

iar pentru $n=0$, găsim :

$$I_1=\int_0^\infty f(t)\,dt=-F(z)\Big|_0^\infty=F(0)-\lim_{z\to\infty}F(z)$$

Exemple :

$$I_1=\int_0^\infty e^{-at}\cos\omega t\,dt=-\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}\Big|_0^\infty=\frac{a}{a^2+\omega^2}$$

$$I_2=\int_0^\infty \frac{\sin at+\sin bt}{t}\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty\left(\frac{a}{p^2+a^2}+\frac{b}{p^2+b^2}\right)\mathrm{d}p=$$

$$=\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{p}{a}+\operatorname{arc\,tg}\frac{p}{b}\right)\Bigg|_0^\infty=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi\ ;\ (a,b>0).$$

$$I_3=\int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t=(-1)^{n+1}\frac{d^n}{\mathrm{d}p^n}\frac{1}{p+a}\Bigg|_0^\infty=$$

$$=-\frac{n\,!}{(p+a)^{n+1}}\Bigg|_0^\infty=\frac{n\,!}{a^{n+1}};\ a>0.$$