1. ECUAȚII DIFERENȚIALE
Considerații generale

Studiul ecuatiilor diferențiale formeazã obiectul unui capitol foarte important al matematicii, atât datoritã rezultatelor teoretice deosebit de interesante cât şi pentru cã ele au nenumãrate aplicații în cele mai diverse domenii.

Ceea ce deosebeşte o ecuație diferențialã de o ecuație algebricã este faptul cã necunoscuta nu este un numãr ci o funcție care satisface o anumiã egalitate şi care trebuie determinatã.

Multe fenomene sunt descrise cu ajutorul ecuațiilor diferențiale obținute prin metoda cunoscutã sub numele de “metoda diferențialelor. Aceasta constã în înlocuirea unor relații ce apar între creşterile infinit de mici ale unor cantitãți care variazã în timp prin relații între diferențialele (derivatele) lor.

Spre exemplu viteza instantanee $v(t_0)$ de deplasare a unui mobil care la momentul t a parcurs distanța $s(t)$ este $v(t_0)=\lim\limits_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}=s'(t_0)$. La rândul sãu accelerația corpului la momentul t_0 este $a(t_0)=\lim\limits_{t\to t_0}\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}=v'(t_0)=s''(t_0)$. In relațiile ce descriu mişcarea viteza se va considera $v(t)=s'(t)$ şi $a(t)=v'(t)=s''(t)$.

Exemplu : Mişcarea unui corp sub acțiunea greutãții sale şi întâmpinând o rezistențã a aerului proporționalã cu viteza sa (acest caz corespunde vitezelor mici) poate fi descrisã cu ajutorul unei ecuații diferențiale.

Se noteazã $v(t)$ viteza instantanee a corpului la momentul de timp $t>0$. Rezistența aerului va fi $R(t)=kv(t)$. Legea fundamentalã a mecanicii ($\vec{F}=m\vec{a}$) conduce la relația $mg-kv(t)=mv'(t)$

care reprezintã o ecuație diferențialã cu necunoscuta $v=v(t)$. Pentru a determina viteza instantanee a corpului trebuie rezolvatã aceastã ecuație.

Probleme fundamentale în teoria ecuațiilor (în general) sunt determinarea soluțiilor lor sau aproximarea acestor soluții dacã determinarea analiticã nu este posibilã.

Teoria ecuațiilor diferențiale are mai multe ramuri:

- **teoria cantitativã** se ocupã de rezolvarea analiticã a ecuațiilor. Sunt precizate tipurile de ecuații ale căror soluții se pot obține analitic şi tehnicile de rezolvare a lor.
- **teoria calitativã** încearcã sã deducã proprietãțile soluțiilor, chiar dacã expresia lor analiticã nu poate fi cunoscutã
- **aplicarea metodelelor numerice pentru aproximarea soluțiilor**

Scopul acestui capitol este prezentarea celor mai importante elemente ale teoriei cantitative a ecuațiilor diferențiale.

1.1 Consideraţii generale

Definiţia 1. Se numeşte **ecuaţie diferenţialã** cu variabila independentă x, şi funcţia necunoscutã $y = y(x)$ o egalitate de forma

$$F\left(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)\right) = 0 \qquad (1)$$

unde $F : D \subset R^{n+1} \to R$ este o functie datã, continuã pe domeniul sãu de definiţie, iar y', y'', $y^{(n)}$ sunt derivatele lui y.

Dacă ecuaţia (1) este scrisã sub forma

$$y^{(n)} = f\left(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x)\right) \qquad (1')$$

se spune cã are formã explicitã.

Ecuaţia diferenţialã are ordinul "*n*" dacã derivata de ordin maxim care apare in ecuaţie este $y^{(n)}$.

Exemple:

1) $x^2 + y^2(x) = 0$ nu este ecuaţie diferenţialã, pentru cã derivatele funcţiei necunoscute "*y*" nu apar in ecuatie, dar $x^2 + (y''(x))^2 = 0$ este o ecuaţie diferenţialã de ordinul 2 cu funcţia necunoscutã "*y*" şi variabila independentã "*x*".

2) $mv'(t) + kv(t) - mg = 0$ este o ecuaţie diferenţialã de ordinul I cu necunoscuta "*v*" şi variabila independentã "*t*". Ea descrie mişcarea unui corp sub acţiunea greutãţii sale şi întâmpinând o rezistenţã a aerului proporţionalã cu viteza sa (funcţia necunoscutã, v, este viteza corpului).

3) $q'(t) = -\dfrac{q(t)}{C \cdot R}$ este o ecuaţie diferenţialã de ordinul I cu necunoscuta "*q*" şi variabila independentã "*t*". Ea descrie procesul de descãrcare al unui condensator de capacitate C într-o rezistenta R (funcţia necunoscutã "q" reprezintã sarcina electricã).

4) $x \cdot \ln x - y' + 3y'' - 7xy + 5x^2 y''' = 0$ reprezintã o ecuaţie diferenţialã de ordinul 3 cu necunoscuta "*y*" şi variabila independentã '*x*".

5) $(x + y + 1)dx + \left(x - y^2 + 3\right)dy = 0$ reprezintã o ecuaţie diferenţialã de ordinul I pentru cã apar notatiile « *dx »* şi *« dy »* asociate formal cu derivatele de ordinul I. Necunoscuta problemei trebuie precizatã : dacã folosim notaţia $y' = dv / dx$ atunci ecuaţia se scrie sub forma $(x + y + 1) + \left(x - y^2 + 3\right)y' = 0$ şi necunoscuta ecuaţiei este *y*, dar dacã vom considera cã $x' = dx / dy$ ecuaţia se scrie sub forma $(x + y + 1)x' + \left(x - y^2 + 3\right) = 0$ şi necunoscuta ecuaţiei este « *x* ».

Definiția 2 Se numeşte **soluție a ecuației diferențiale** (1) pe intervalul $I \subset R$ orice funcție $\phi : I \to R$, derivabilă de n ori pe I, care verifică ecuația, adică pentru orice $x \in I$ are loc egalitatea $F\left(x, \phi(x), \phi'(x), ..., \phi^{(n)}(x)\right) = 0$.

Există trei tipuri de solutii:

- **Soluția generală** a ecuației (1) este soluția care depinde de x şi de n constante arbitrare $C_1, C_2, ..., C_n$ (exact atâtea cât este ordinul ecuației), adică este de forma $y = \phi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$. Aceasta este *forma explicită a soluției* pentru că se precizează modul în care funcția necunoscută y depinde de variabila independentă x

Uneori soluția generală este prezentată în *formă implicită (*integrala generală a ecuației), adică $\Omega(x, y, C_1, ..., C_n) = 0$.

Soluția generală se poate obține şi sub *formă parametrică* :
$x = f(t, C_1, ..., C_n),\ y = g(t, C_1, ..., C_n)$

- Orice soluție care se obține din soluția generală pentru anumite valori particulare ale constantelor se numeşte **soluție particulară.**
- Soluțiile ecuației care nu se pot obține prin acest procedeu din soluția generală se numesc **soluții singulare**.

In probleme practice, alături de ecuația diferențială trebuie considerate şi condiții inițiale

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \qquad (2)$$

Ecuația (1) împreună cu condițiile inițiale (2) formează o **problemă Cauchy**.

Soluția unei probleme Cauchy (1)+(2) se obține impunând condițiile inițiale (2) soluției generale a ecuației (1).

Exemple

1. $y' = 3x^2$ este o ecuație diferențială de ordinul I. cu necunoscuta *y.*

Soluția sa generală este $y : R \to R,\ y(x) = x^3 + C$ deoarece verifica ecuația. Ea depinde de o singură constantă. $y(x) = x^3 + 1$, $y(x) = x^3 - \sqrt{2}$ sunt soluții particulare ale ecuației pentru că au fost obținute din soluția generală pentru $C = 1$, respectiv $C = -\sqrt{2}$. Există o infinitate de soluții particulare ale ecuației.

2. $y' = \sqrt{1 - y^2}$ este o ecuație diferențială de ordinul I. cu necunoscuta y si variabila independentă *x*.

Funcția $y : \left[C - \frac{\pi}{2}, C + \frac{\pi}{2}\right] \to R,\ y(x) = \sin(x - C)$ reprezintă soluția generală a ecuației.

Funcția $y:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to R,\ y(x)=\sin x$ este soluție particulară (obținută din soluția generală pentru $C=0$).

Funcția $y:[0,\pi]\to R,\ y(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$ este soluție particulară (obținută din soluția generală pentru $C=\frac{\pi}{2}$).

Alte soluții particulare se pot obține în același mod, pentru fiecare domeniul de definiție fiind altul.

Ecuația admite soluțiile singulare $y_1:R\to R,\ y_1(x)=1$ și $y_2:R\to R,\ y_2(x)=-1$.

3. $y^{(5)}-2y^{(4)}+y^{(3)}-2y^{(2)}=0$ este o ecuație diferențială de ordinul 5.

Soluția sa generală este $y:R\to R,\ y(x)=C_1+C_2x+C_3e^{2x}+C_4\cos x+C_5\sin x$.

$y(x)=x,\ y(x)=3-\sin x$ sunt exemple de soluții particulare.

4. Problema Cauchy $\begin{cases} y^{IV}-4y'''+5y''-4y'+4=0 \\ y(0)=5,\ y'(0)=2,\ y''(0)=3,\ y'''(0)=24 \end{cases}$

are soluția $y(x)=2xe^{2x}+5\cos x$. Această soluție se obține din soluția generală a ecuației diferențiale, anume $y(x)=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+C_3\cos x+C_4\sin x$ determinând

constantele din sistemul $\begin{cases} y(0)=C_1+C_3=5 \\ y'(0)=2C_1+C_2+C_4=2 \\ y''(0)=4C_1+4C_2-C_3=3 \\ y'''(0)=8C_1+12C_2-C_4=24 \end{cases}$

Soluția sistemului este $C_1=0, C_2=2, C_3=5, C_4=0$ deci soluția problemei Cauchy este $y(x)=2xe^{2x}+5\cos x$

5. Soluția generală a ecuației $y\cdot\ln y+(x-\ln y)\cdot y'=0$, satisface relația

$$2\cdot x\cdot\ln y=\ln^2 y+C.$$

Aceasta este forma implicită a soluției.

In adevăr, prin derivarea relației anterioare obținem $2\cdot\ln y+\frac{2x}{y}\cdot y'=2\cdot\ln y\cdot\frac{1}{y}\cdot y'$,

de unde rezultă $y\cdot\ln y+(x-\ln y)\cdot y'=0$ adică faptul că funcția y satisface ecuația diferențială și deci este soluția sa generală (deoarece depinde de o constantă). Determinarea formei sale explicite este mai dificilă.

6. Soluția generală a ecuației $(4x+3y+3y^2)+(2xy+x)y'=0$ satisface relația

$$x^4 + x^3y^2 + x^3y = C.$$

Derivând relația anterioară obținem $4x^3 + 3x^2y^2 + 2x^3yy' + 3x^2y + x^2y' = 0$ adică $x^2 \cdot \left[\left(4x + 3y + 3y^2\right) + \left(2xy + x\right)y'\right] = 0$ ceea ce arată că funcția y satisface ecuația (variabila independentă x trebuie să şi ia valori nenule deci primul factor al produsului poate fi considerat nenul).

O problemã importantã in teoria ecuațiilor diferențiale este determinarea soluției generale a unei ecuații diferențiale date. Acest lucru este posibil numai pentru un numãr restrâns de ecuații. Unele din aceste cazuri sunt prezentate în paragrafele ce urmeazã.

Exerciții propuse

1. Să se precizeze dacă funcția $y = y(x)$ este soluție a ecuației diferențiale (sau a problemei Cauchy) în următoarele cazuri. Pentru fiecare soluție să se precizeze domeniul său de definiție.

a). $y^2 + xy - x^2y' = 0$ $\quad$ $y(x) = -x/(C + \ln x)$

b). $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ $\quad$ $y(x) = (x + C)e^{-x^2}$

c). $y' - y = xy^2$ $\quad$ $y(x) = 1/\left(1 - x + C \cdot e^{-x}\right)$

d). $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 3 \end{cases}$ $\quad$ $y(x) = e^x + e^{2x}$

e). $y'' - 5y'6y = 8 \cdot e^x$ $\quad$ $y(x) = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{3x} + 4x$

f). $\begin{cases} (2x+1)^2 y'' - 4(2x+1)y' + 8y = 0 \\ y(1) = 12, \quad y'(1) = 14 \end{cases}$ $\quad$ $y(x) = (2x+1) \cdot (2x+2)$

2. Să se arate că soluția generală a ecuației $\left(x - y^2 + 3\right)y' + x + y + 1 = 0$, scrisă sub formă implicită este $\frac{x^2}{2} + x + 3 \cdot y + x \cdot y - \frac{y^3}{3} = C$.

3. Să se arate că soluția problemei Cauchy $x + y \cdot y' = 0$, $y(0) = 1$ satisface relația $x^2 + y^2 = 1$. Să se precizeze forma parametrică a soluției.

4. Soluția generală a ecuației $y' = \sqrt{1 - y^2}$ este $y'' : [C - \pi/2, C + \pi/2] \to R$, $y(x) = \sin(x - C)$.

Să se scrie soluția problemei Cauchy $y' = \sqrt{1 - y^2}$, $y(3\pi/4) = 1/\sqrt{2}$

Rezolvare: Din $\sin(3\pi/4 - C) = 1/\sqrt{2}$ rezultă $C = \pi/2$ deci soluția este $y : [0, \pi] \to R,\ y(x) = \sin(x - \pi/2) = -\cos x$