5. Sisteme de ecuații diferențiale de ordinul I

Forma explicitã a unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul I este

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ .... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \qquad (11)$$

unde $f_1, f_2, ..., f_n$ sunt funcții date, continue pe un domeniu din R^{n+1}.
O problemã Cauchy este formatã dintr-un sistem de ecuații diferențiale şi un set de condiții inițiale,

$$y_1(x_0) = a_1,\ y_2(x_0) = a_2, ..., y_n(x_0) = a_n \qquad (12)$$

O soluție a sistemului (11) este formatã din funcțiile $y_1, y_2, ..., y_n$ care verificã sistemul.
Astfel de sisteme de ecuații diferențiale apar în mod natural în dinamică, acolo unde legea fundamentală ($\vec{F} = m \cdot \vec{a}$) se poate scrie (ținând cont că $\vec{a} = (x''(t), y''(t), z''(t))$ şi $\vec{F} = (f_1(t, x, y, z, x', y', z'), f_2(t, x, y, z, x', y', z'), f_3(t, x, y, z, x', y', z'))$. Ecuațile de mişcare sunt deci

$$\begin{cases} x'' = f_1(t, x, y, z, x', y', z') \\ y'' = f_2(t, x, y, z, x', y', z') \\ z'' = f_3(t, x, y, z, x', y', z') \end{cases}$$

iar prin notația $x' = u,\ y' = v,\ z' = w$ se obține un system de 6 ecuații diferențiale de ordinul I.
In legatură cu soluțile sistemelor de ecuații diferențiale există câteva rezultate importante.
Teorema 1 Orice sistem de n ecuații diferențiale diferențiale de ordinul I scris sub forma (11) este echivalent cu o ecuație diferențialã de ordin n şi reciproc, orice ecuație diferențialã de ordin n este echivalentã cu un sistem de ecuații diferențiale de ordinul I

Observație: soluția sistemului (11) poate fi gãsitã rezolvând ecuația de ordin n ataşatã prin metoda substituției (se derivează una din ecuațiile sistemului de $n-1$ ori, celelalte de $n-2$ ori şi se eliminã $n-1$ funcții necunoscute). Aceastã metodã se mai numeşte şi *metoda ecuației rezolvante*.

Exemplu : Sã se rezolve sistemul $\begin{cases} y' = z \\ z' = -y \end{cases}$ **.**

Derivând prima ecuație obținem $y'' = z'$. Inlocuind aici $z' = -y$ (din a doua ecuație a sistemului) onținem ecuația de ordinul II $y'' + y = 0$ cu soluția $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Rezultã $z(x) = y'(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

5.1 Sisteme liniare şi omogene de ecuații diferențiale cu coeficienți constanți
Forma generalã a sistemului este

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases} \qquad (13)$$

Sistemului (13) i se asociazã matricea coeficienților, anume $A = \begin{pmatrix} a_{11}\ldots.a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ldots a_{nn} \end{pmatrix}$.

Dacã notãm $Y = \left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right)^\tau$ şi $Y' = \left(y_1', y_2', \ldots, y_n'\right)^\tau$ atunci sistemul se scrie în forma matricealã

$$Y' = A \cdot Y \qquad (13')$$

şi rezultatele prezentate la ecuații diferențiale liniare de ordin n arată că mulțimea soluțiilor sistemului reprezintă un spațiu vestorial de dimensiune « n ».

Soluțiile fundamentale ale sistemului vor fi cãutate sub forma $Y_i = \left(\alpha_{1i}\, \alpha_{2i} \ldots.\alpha_{ni}\right)^\tau e^{\lambda_i x}$ unde λ_i sunt valori proprii a matricii A, adicã soluțiile ecuației caracteristice a sistemului :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots\ a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots\ a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (14)$$

iar constantele α_{ij} trebuiesc determinate din sistem.

Dacă $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sunt n soluții liniar independente atunci soluția generalã a sistemului este

$$Y = C_1Y_1 + C_2Y_2 + \ldots + C_nY_n \qquad (15)$$

Existã următoarele situații importante :

- Dacã ecuația caracteristicã (14) are soluțiile reale şi distincte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ şi $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sunt vectorii corespunzãtori acestor valori atunci soluția sistemului este
$$Y\left(x\right) = C_1V_1e^{\lambda_1 x} + C_2V_2e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_nV_ne^{\lambda_n x}$$
- Dacã ecuația caracteristicã (14) are soluții multiple (reale sau complexe), fiecare soluție λ cu ordinul de multiplicitate p contribuie în suma (15) cu termenii

$$Y_1 = V_1e^{\lambda x},\ Y_2 = e^{\lambda x}\left(\frac{x}{1!}V_1 + V_2\right),\ \ldots,$$

$$Y_p = e^{\lambda x}\left(\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}V_1 + \frac{x^{p-2}}{\left(p-2\right)!}V_2 + \ldots + \frac{x}{1!}V_{p-1} + V_p\right)$$

unde $V_1, V_2, \ldots V_p$ sunt vestorii proprii corespunzãtori valorii proprii λ.

Problema rezolvãrii sistemului (13) se reduce deci la determinarea valorilor proprii pentru matricea A şi a vectorilor proprii corespunzãtori acestor valori.

Metoda de rezolvare :

a) Se scrie matricea A a sistemului ;
b) Se determinã valorile proprii ale matricii rezolvand ecuația (14) ;
c) Pentru fiecare valoare proprie λ_i se determinã vectorii proprii (atâția cât e ordinul de multiplicitate al lui λ_i şi se scriu soluțiile corespunzãtoare lui λ_i ;
d) Se scrie sistemul fundamental de soluții al sistemului ;
e) Se scrie soluția generalã.

Exemple : Sã se determine soluția generalã a sistemelor urmãtoare

1. $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' = -y_1 + 5y_2 - y_3 \\ y_3' = y_1 - y_2 + 3y_3 \end{cases}$

a) Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

b) Valorile proprii ale matricii A sunt $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ şi $\lambda_3 = 6$, adicã soluțiile ecuației

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

c) Valoarea λ_1 are ordinul de multiplicitate 1, deci va avea un singur vector propriu $V_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ care verificã ecuatia $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$.

Din rezolvarea sistemului compatibil nederminat cu un grad de libertate

$$\begin{cases} 3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 2\alpha_1 \\ -\alpha_1 + 5\alpha_2 - 3\alpha_3 = 2\alpha_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 2\alpha_3 \end{cases}$$

ee obține soluția $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix}$. Se dã lui α o valoare particularã, de exemplu $\alpha = 1$ şi

obținem $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. In mod asemãnãtor obținem $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ şi $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ corespunzând valorilor λ_2 şi λ_3.

d) Sistemul fundamental este $Y_1 = e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \\ -e^{2x} \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} e^{3x} \\ e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}$, $Y_3 = \begin{pmatrix} e^{6x} \\ -2e^{6x} \\ e^{6x} \end{pmatrix}$.

e) Soluția generalã este $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C_1Y_1 + C_2Y_2 + C_3Y_3$, adicã $\begin{cases} y_1 = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + C_3e^{6x} \\ y_2 = \qquad\qquad C_2e^{3x} - 2C_3e^{6x} \\ y_3 = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + C_3e^{6x} \end{cases}$

2. $\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3 \\ y_2' = y_3 + y_1 \\ y_3' = y_1 + y_2 \end{cases}$.

Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ecuația caracteristicã , $\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$ are

rãdãcinile $\lambda_1 = 2$ şi $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Un vector propriu al lui λ_1 este $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Subspațiul valorii proprii $\lambda_2 = \lambda_3$ are dimensiunea 2. Vectorii proprii satisfac ecuația $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, adicã sistemul cu douã grade de nedeterminare

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0\end{cases}$$. Alegând $\alpha_1=-1,\alpha_2=0$ se obține $\alpha_3=1$ şi pentru $\alpha_1{}^*=0,\alpha_2{}^*=1$

se obține $\alpha_3{}^*=-1$. Cei doi vectori proprii principali vor fi $V_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ şi $V_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Valorile $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1{}^*,\alpha_2{}^*$ se aleg astfel încât $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_1{}^* & \alpha_2{}^*\end{vmatrix}=\alpha_1\alpha_2{}^*-\alpha_2\alpha_1{}^*\neq 0$.

Soluția generalã a sistemului este $Y=C_1V_1e^{2x}+C_2V_2e^{-x}+C_3(xV_2+V_3)e^{-x}$ adicã

$$\begin{cases}y_1=C_1e^{2x}-C_2e^{-x}-C_3xe^{-x}\\ y_2=C_1e^{2x}\qquad\qquad +C_3e^{-x}\\ y_3=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}+C_3\left(x-1\right)e^{-x}\end{cases}.$$

5.2. Sisteme liniare neomogene cu coeficienți constanți

Forma generalã este

$$Y'\left(x\right)=A\cdot Y\left(x\right)+F\left(x\right) \qquad (16)$$

Ca şi în cazul ecuațiilor liniare neomogene, soluția generalã a sistemului neomogen este suma dintre soluția generalã a sistemului omogen si o soluție particularã a sistemului neomogen.
Pentru determinarea soluției particulare se poate folosi metoda variației constantelor.

Teoremã : Dacã $Y=C_1Y_1+...+C_nY_n$ este soluția sistemului omogen asociat lui (16) atunci o soluție particularã a acestuia este $Y_P=C_1\left(x\right)Y_1+...+C_n\left(x\right)Y_n$ unde funcțiile $C_1\left(x\right),...,C_n\left(x\right)$ satisfac ecuația

$$C_1{}'\left(x\right)Y_1+C_2{}'\left(x\right)\left(Y_2\right)+...+C_n{}'\left(x\right)Y_n=F\left(x\right) \qquad (17)$$

Din ecuația (17) se calculeazã $C_1{}'\left(x\right),...,C_n{}'\left(x\right)$ şi apoi, prin integrare se obțin $C_1,C_2,...,C_n$.

Exemplu : Să se rezolve sistemul $\begin{cases}x'=5x-3y+2e^{3t}\\ y'=x+y+5e^{-t}\end{cases}$

Sistemul omogen $\begin{cases}x'=5x-3y\\ y'=x+y\end{cases}$ are matricea coeficienților data de $A=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Valorile sale proprii sunt $\lambda_1 = 4$ şi $\lambda_2 = 2$, vectorii proprii corespunzator acestora sunt $V_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, respective $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ iar soluția generală a sistemului este

$$\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix} = C_1 \cdot V_1 \cdot e^{4t} + C_2 \cdot V_2 \cdot e^{2t} = \begin{pmatrix} 3C_1 e^{4t} + C_2 e^{2t} \\ C_1 e^{4t} + C_2 e^{2t} \end{pmatrix}$$

Expresiile pentru C_1 şi C_2 se determină din sistemul

$$\begin{cases} 3C_1' e^{4t} + C_2' e^{2t} = 2e^{3t} \\ C_1' e^{4t} + C_2' e^{2t} = 5e^{-t} \end{cases}.$$

Soluții ale acestui sistem sunt

$$C_1 = e^{-5t}/2 - e^{-t}, \quad C_2 = -e^{t} - 5e^{-3t}/2$$

O soluție particulară a sistemului neomogen este $\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} - 4e^{3t} \\ -2e^{-t} - 2e^{3t} \end{pmatrix}$

Rezultă că soluția generală a sistemului este

$$\begin{cases} x = 3C_1 e^{4t} + C_2 e^{2t} - e^{-t} - 4e^{3t} \\ y = C_1 e^{4t} + C_2 e^{2t} - 2e^{-t} - 2e^{3t} \end{cases}$$

Exerciții propuse

I Sã se rezolve sistemele urmãtoare :

1. $\begin{cases} y' + 2y + 4z = 1 + 4x \\ z' + y - z = 3x^2/2 \end{cases}$ **R :** $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + x^2 + x$,

$z = -C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}/4 - x^2/2$

2. $\begin{cases} y' + 2y + z = \sin x \\ z' - 4y - 2z = \cos x \end{cases}$ **R :**

$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} - \frac{3}{8}\cos x - \frac{1}{8}\sin x, \; z(x) = \sin x - y' - 2y$

3. $\begin{cases} y' = z \\ z' = u \\ u' = y \end{cases}$ **R :** $y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x/2} \cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + C_3 e^{-x/2} \sin\frac{x\sqrt{3}}{2}$

$z(x) = y'(x)$

$u(x) = z'(x)$

4. $\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = 2x - y \end{cases}$ **R :** $\begin{matrix} x(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-3t} \\ y(t) = C_1 e^{t} - C_2 e^{-3t} \end{matrix}$

5. $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y + t \end{cases}$ **R :** $\begin{array}{l} x(t) = C_1 + C_2 e^{2t} - \dfrac{t^2}{4} - \dfrac{t}{4} - \dfrac{1}{8} \\ y(t) = -C_1 + C_2 e^{2t} + \dfrac{t^2}{4} - \dfrac{t}{4} - \dfrac{1}{8} \end{array}$

6. $\begin{cases} y' = z + u \\ z' = y + u \\ u' = y + z \end{cases}$ **R :** $\begin{cases} y(x) = C_1 e^{2x} - (C_2 + C_3) e^{-x} \\ z(x) = C_1 e^{2x} + C_3 e^{-x} \\ u(x) = C_1 e^{2x} + (xC_3 + C_2 - C_3) e^{-x} \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = 4x - y + z \\ y' = x + 3y - z \\ z' = y + z \end{cases}$ **R :** $\begin{cases} x = [C_2 + C_3(t+2)] e^{3t} \\ y = C_1 e^{2t} + [2C_2 + C_3(2t+1)] e^{3t} \\ z = C_1 e^{2t} + (C_2 + C_3 t) e^{3t} \end{cases}$

8.
$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 8y_2 + 4y_3 \\ y_2' = -y_1 + 5y_2 - 2y_3 \\ y_3' = -3y_1 + 14y_2 - 6y_3 \end{cases}$ **R :** $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot e^{-x} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{x} + C_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot e^{-x}$

9. $\begin{cases} x' = y + tg^2 t - 1 \\ y' = -x + tgt \end{cases}$ **R :** $\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + tgt \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + 2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x + 2e^t \end{cases}$ **R :** $\begin{cases} x = (C_1 + C_2 t + C_2 - t^2) e^t \\ y = (C_1 + C_2 t + 2t - t^2) e^t \end{cases}$

II Să se rezolve problema Cauchy $\begin{cases} y' - \dfrac{2x}{1+x^2} \cdot y = 0 \\ z' - y + \dfrac{1}{x} \cdot z = x \\ y(1) = 2, \quad z(1) = 1 \end{cases}$. **R :** $\begin{cases} y(x) = 1 + x^2 \\ z(x) = x + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{1}{3x} \end{cases}$