Lecția 7
Aplicații ale ecuațiilor diferențiale de ordin superior si ale sistemelor de ecuații diferențiale

1. Oscilații armonice

1a. Oscilații neamortizate (ecuație liniară)

Ecuația oscilațiilor neamortizate este

$$x''(t)+\omega_0^2\cdot x(t)=a\cdot\sin\omega t.$$

Ea este o ecuație diferențială liniară de ordinul II cu coeficienți constanți. Ecuația caracteristică ataşată este $r^2+\omega_0^2=0$ şi are soluțiile $r_1=\omega_0\cdot i$, respectiv $r_2=-\omega_0\cdot i$. Soluția generală a ecuației omogene este

$$x_g(t)=C_1\cos\omega_0 t+C_2\sin\omega_0 t\ .$$

Pentru a găsi o soluție particulară se disting două cazuri :

- dacă $\omega_0\neq\omega$ o soluție particulară are forma $x(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$.

In această situație $x'(t)=-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t$ şi $x''(t)=-A\omega^2\cos\omega t-B\omega^2\sin\omega t$. Introducând în ecuație obținem $(\omega_0^2-\omega^2)A\cos\omega t+(\omega_0^2-\omega^2)B\sin\omega t=a\sin\omega t$ şi, din identificarea coeficienților rezultă $A=0$ şi $B=\dfrac{a}{\omega_0^2-\omega^2}$. Soluția particulară este deci

$$x_p(t)=\frac{a}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\omega t\quad .$$

Soluția generală a ecuației va fi $x(t)=C_1\cos\omega_0 t+C_2\sin\omega_0 t+\dfrac{a}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\omega t$.

- dacă $\omega_0=\omega$ soluția particulară se caută sub forma $x_p(t)=(At+B)\sin\omega_0 t+(Ct+D)\cos\omega_0 t$. Din calcule similare celor precedente rezultă $x_p(t)=-\dfrac{a}{2\omega_0}t\cos\omega_0 t$ şi soluția generală este

$$x(t)=(C_1-\frac{a}{2\omega_0}t)\cdot\cos\omega_0 t+C_2\sin\omega_0 t\quad .$$

In acest caz amplitudinea mişcării devine considerabilă, ceea ce permite obținerea unor efecte enorme folosind un termen perturbator mic (valoarea lui *a* este mică). Acest efect este important (de exemplu) pentru obținerea unor tensiuni ridicate necesare amplificării unor semnale radio.

1b. Oscilații amortizate

Dacă se ține cont de amortizarea oscilațiilor se obține ecuația

$$x''(t)+2\alpha\cdot x'(t)+\Omega^2\cdot x(t)=a\cdot\sin\omega t\ .$$

Ecuația carateristică asociată, $r^2+2\alpha r+\Omega^2=0$, are soluțiile $r_{1.2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega^2}$

- dacă $\alpha^2 > \Omega^2$ soluția generală este $x_g(t) = C_1 e^{\left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \Omega^2}\right)t} + C_2 e^{\left(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \Omega^2}\right)t}$
- dacă $\alpha^2 = \Omega^2$ soluția generală este $x_g(t) = (C_1 t + C_2)e^{-\alpha t}$
- dacă $\alpha^2 < \Omega^2$ soluția generală este $x_g(t) = e^{-\alpha t}\left(C_1 \cos\left(t\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2}\right) + C_2 \sin\left(t\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2}\right)\right)$.

Condiția $\alpha > 0$ arată că $\lim_{t \to \infty} x_g(t) = 0$ adică, în absența unui termen perturbator, mişcarea este amortizată .

Deoarece ecuația caracteristică nu are rădăcini pur imaginare, soluția particulară se caută sub forma $x_p(t) = A\sin \omega t + B\cos \omega t$.

Inlocuind $x'(t) = A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t$ şi $x''(t) = -A\omega^2 \sin \omega t - B\omega^2 \cos \omega t$ în ecuația inițială obținem, prin identificarea coeficienților, ecuațiile $\begin{cases} (\Omega^2 - \omega^2)A - 2\alpha\omega B = a \\ 2\alpha\omega A + (\Omega^2 - \omega^2)B = 0 \end{cases}$

din care rezultă

$$A = a\frac{\Omega^2 - \omega^2}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \quad \text{şi} \quad B = -a\frac{2\alpha\omega}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}.$$

In acest caz soluția particulară este

$$x_p(t) = a\frac{\Omega^2 - \omega^2}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}\cos \omega t - a\frac{2\alpha\omega}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}\sin \omega t$$

Ca de obicei, soluția generală a ecuației este $x(t) = x_g(t) + x_p(t)$.

Exemplu: Să se resolve ecuația $x'' + 4x' + 9x = 3\sin 2t.$

In acest caz $\alpha = 2$, $\Omega = 3$, $\omega = 2$.

Ecuația caracteristică $r^2 + 4r + 9 = 0$ are soluțiile $r_{1,2} = -2 \pm i\sqrt{5}$, deci soluția generală a ecuației omogene este $x_g(t) = e^{-2t}\left(C_1 \cos \sqrt{5}t + C_2 \sin \sqrt{5}t\right).$

Soluția particulară este $x_p(t) = \frac{15}{89}\sin 2t - \frac{24}{89}\cos 2t$. Ea se mai poate scrie sub forma $x_p(t) = \frac{3}{\sqrt{89}}\sin(2t - \phi)$, unde $tg\phi = \frac{8}{5}$. Ea are perioada principală $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ care este considerată perioada de oscilație.

Să observăm însă că soluția generală

$$x(t) = e^{-2t}\left(C_1 \cos \sqrt{5}t + C_2 \sin \sqrt{5}t\right) + \frac{3}{89}(5\sin 2t - 8\cos 2t)$$

Nu este o funcție periodică.

2. Mişcarea unui pendul (ecuaţie liniară)

Să se descrie mişcarea unui pendul legat de punctul O printr-un fir de lungime *l*, dacă acest pendul este deviat de la verticala locului cu unghiul la centru θ_0 şi viteza sa iniţiala este v_0.

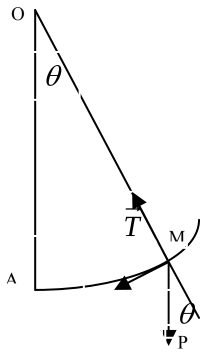

Figura 3. Pendulul matematic

Se consideră ca variabilă independentă unghiul dintre verticala locului şi firul *OM* (pendulul se află în punctul M). Funcţia necunoscută $x = x(\theta)$ reprezintă arcul *OM*. Asupra corpului aflat în *M* acţionează greutatea $\vec{G} = mg$ dirijată pe verticală în jos şi tensiunea în fir dirijată de-a lungul firului spre punctul *O*. Forţa rezultantă este $\vec{F} = -mg\sin\theta \cdot \vec{t} + (T - mg\cos\theta)\cdot \vec{n}$, unde $\vec{t}$, $\vec{n}$ reprezintă vectorul tangent, respectiv normal, la traiectorie.

Proiectând legea fundamentală $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ de-a lungul tangentei la traiectorie şi tinând cont că acceleraţia este a doua derivată a spaţiului, obţinem ecuaţia

$$x''(\theta) = -g\sin\theta .$$

Dacă $\theta < 10^\circ$ atunci se poate face aproximaţia $\sin\theta \approx \theta = x(\theta)/l$ şi ecuaţia devine

$$x'' = -g \cdot x / l$$

Aceasta poate fi considerată o oscilaţie neamortizată dacă vom considera $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. Soluţia sa generală (vezi paragraful 1 sect 1a.) este $x(t) = C_1\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right) + C_2\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right)$. Ea se mai poate scrie

$$x(t) = \sqrt{C_1^{\,2} + C_2^{\,2}}\left(\sin\phi\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right) + \cos\phi\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right)\right) = M\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t + \phi\right),$$

unde $\phi \in (-\pi, \pi)$ este unghiul ce are $\cos\phi = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$ şi $\sin\phi = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$ iar $M = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$.

Aceasta este cea mai simplă mişcare periodică, numită şi mişcare armonică.

Perioada mişcării este $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\left(\sqrt{\frac{l}{g}}\right)$, care este independentă de masa pendulului.

Constantele mişcării (C_1, C_2 sau M, ϕ) se determină din condițiile inițiale $x(0) = \pi \cdot l \cdot \theta_0 / 180$, $x'(0) = v_0$.

3. Calculul perioadei unui circuit oscilant (ecuație liniară)

Un circuit oscilant este format dintr-o bobină (de inductanță L) legată de un condensator de capacitate C. Codensatorul, încărcat în prealabil, se descarcă în bobină.

Variabila independentă este timpul *t*. Se notează

- $i(t)$ intensitatea curentului la momentul *t*
- $q(t)$ sarcina electrică a condensatorului la momentul *t*
- $v(t) = q(t)/C$ diferența de potențial la bornele condensatorului la momentul *t*.

Forța electromotoare datorată variației de flux în bobină este $e = -L \cdot i'(t)$ iar legea lui Kirchoff arată că $i(t) = (v(t) + e(t))/R$.

Inlocuind toate aceste expresii in funcție de $q(t)$ obținem ecuația

$$q''(t) + \frac{R}{L} \cdot q'(t) + \frac{1}{L \cdot C} q(t) = 0$$

Ceea ce reprezintă un oscillator amortizat fără termen perturbator (paragraful 1, secțiunea 1b.), considerând $\alpha = \frac{R}{2L}$ şi $\Omega^2 = \frac{1}{L \cdot C}$. Reluând rezultatele prezentate acolo obținem:

- dacă $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ (adică $\alpha^2 > \Omega^2$) atunci soluția generală este

$$q(t) = A \cdot e^{\left(\sqrt{\alpha^2 - \Omega^2} - \alpha\right)t} + Be^{\left(-\sqrt{\alpha^2 - \Omega^2} - \alpha\right)t}.$$

Constantele *A* şi *B* se determină din condițiile inițiale $q(0) = q_0$ şi $i(0) = 0$

Din sistemul $\begin{cases} A+B=q_0 \\ A\left(\sqrt{\alpha^2-\Omega^2}-\alpha\right)-B\left(\left(\sqrt{\alpha^2-\Omega^2}+\alpha\right)\right)=0 \end{cases}$ rezultă $A=\frac{q_0}{2}\cdot\frac{\sqrt{\alpha^2-\Omega^2}+\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\Omega^2}}$ şi $B=\frac{q_0}{2}\frac{\sqrt{\alpha^2-\Omega^2}-\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\Omega^2}}$.

Să remarcăm că puterile ce apar la exponenți sunt amândouă negative şi deci $\lim_{t\to\infty} q(t)=0$.

- dacă $R=2\cdot\sqrt{\frac{L}{C}}$ (adică $\alpha^2=\Omega^2$) atunci soluția generală este $q(t)=(At+B)\cdot e^{-\alpha t}$.

Coeficienții *A* şi *B* sunt în acest caz $A=-q_0$ şi $B=q_0$ şi soluția se scrie

$$q(t)=q_0(t-1)\cdot e^{-\alpha t}.$$

- dacă $R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$ (adică $\alpha^2<\Omega^2$) atunci soluția generală este

$$q(t)=e^{-\alpha t}\left(M\cos\left(\sqrt{\Omega^2-\alpha^2}\cdot t\right)+N\sin\left(\sqrt{\Omega^2-\alpha^2}\cdot t\right)\right).$$

Din condițiile inițiale rezultă $M=q_0$ şi $N=\frac{q_0\alpha}{\left(\sqrt{\Omega^2-\alpha^2}\right)}$.

In problemele legate de circuite electrice este mai importantă studierea funcțiilor *i(t)* şi *v(t)* decât cunoaşterea lui *q(t)*, de aceea le explicităm în acest ultim caz.

Se notează $\sqrt{\Omega^2-\alpha^2}/\alpha=tg\phi$, deci $\cos\phi=\alpha/\Omega$ şi $\sin\phi=\sqrt{\Omega^2-\alpha^2}/\Omega$ şi se obține

$$v(t)=\frac{q_0}{C}\cdot\frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2-\alpha^2}}e^{-\alpha t}\cdot\sin\left(\sqrt{\Omega^2-\alpha^2}\cdot t+\phi\right)$$

$$i(t)=\frac{q_0\Omega^2}{\sqrt{\Omega^2-\alpha^2}}e^{-\alpha t}\cos\left(\sqrt{\Omega^2-\alpha^2}\cdot t\right).$$

Ea reprezintă o mişcare oscilantă amortizată, neperiodică, dar distanța între punctele de extrem este constantă, $T=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}}$. Aceasta formulă a fost obținută de William Thomson şi este cunoscută sub numele de "perioadă a circuitului oscilant".

Un astfel de circuit este un generator de oscilații amortizate.

In situații concrete α^2 este mult mai mic decât Ω^2 deci $\cos\phi\approx 0$ şi $\sin\phi\approx 1$, ceea ce arată că $\phi\approx\pi/2$. In aceste condiții se obțin

$$v(t)=\frac{q_0}{C}e^{-\alpha t}\sin\left(\Omega t+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{q_0}{2}e^{-\alpha r}\cos\Omega t \quad .$$

$$i(t)=q_0\Omega e^{-\alpha t}\sin\Omega t$$

In această situație perioada circuitului este $T=2\pi\sqrt{LC}$.

4. **Oscilații ale unei coloane de lichid (ecuație liniară)**

Se consideră un tub în forma de U, deschis la ambele capete, cu secțiunea S conținând un lichid. Se provoacă o denivelare a lichidului față de poziția de echilibru radicând nivelul său într-o aripă a tubului cu x_0. Să se descrie mişcarea lichidului.

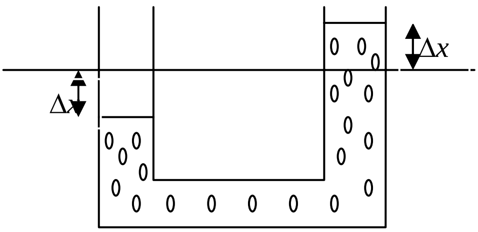

Figura 4. Oscilatia unei coloane de lichid

Variabila independentă este timpul t iar funcția necunoscută este $x=x(t)$, care măsoară diferența de nivel dintre poziția de echilibru şi nivelul licidului măsurată pe o aripă a tubului.

Se consideră cunoscute m = masa lichidului, S = secțiunea tubului, l = lungimea tubului ocupată de lichid, ρ = densitatea lichidului şi g = accelerația gravitațională. Deoarece tubul poate fi asimilat cu unul cilindric se poate considera că $m=\rho\cdot l\cdot S$.

Lichidul se pune în mişcare pentru că asupra lui acționează forța de greutate corespunzătoare coloanei de lichid cu înălțimea $2x(t)$. Mărimea acestei forțe este $F(t)=2\cdot x(t)\cdot S\cdot\rho\cdot g$. Scriind legea fundamentală a dinamicii obținem ecuația $m\cdot x''(t)=-2\cdot x(t)\cdot S\cdot\rho\cdot g$, adică

$$x''(t)+\frac{2g}{l}x(t)=0.$$

Ea reprezintă un oscillator neamortizat (paragraful 1, secțiunea 1a.) dacă notăm $\omega_0^{\,2}=\frac{2g}{l}$.

Soluția generală este $x(t)=x_0\sin\left(\sqrt{\frac{2g}{l}}\cdot t+\phi\right)$ ceea ce arată că, în cazul ideal (fără amortizare datorată frecării) lichidul va avea o mişcare oscilantă în jurul poziției de echilibru.
Dacă se ia în considerare şi frecarea se obține o mişcare oscilantă amortizată asemănătoare celei din paragraful anterior.

4. Propagarea căldurii într-o bară (ecuație liniară)

Se consideră o bară de lungime mare, teoretic infinită care este încastrată cu o extremitate într-un mediu a caarui temperatură este mai mare decât cea a mediului ambiant. Să se descrie distribuția temperaturii de-a lungul barei atunci când este atins regimul permanent, adică temperatura nu se modifică în timp.

Variabila independentă este *x*, distanța la punctul de fixare, corespunzător lui *x=0*. funcția necunoscută este temperatura $T=T(x)$.
Cantitatea de căldură ce traversează secțiunea *S* a barei (aflată la distanța *x* de punctul de fixare) într-o secundă este $Q=-K\cdot S\cdot T'(x)$. Coeficientul *K* măsoară conductivitatea termică a materialului şi semnul “-“ arată că temperatura se micşorează atunci când ne depărtăm de punctul de fixare..
Pe distanța Δx se pierde o cantitate de căldură $\Delta Q=-K\cdot S\cdot\Delta x\cdot T''(x)$.
Această pierdere poate fi calculată şi folosind formula $\Delta Q=-\alpha\cdot T(x)\cdot p\cdot\Delta x$ unde α este coeficientul de dispersie a căldurii (care depinde de calitățile suprafeței exerioare, de exemplu porozitate, culoare) iar *p* este aria laterală a barei de lungime Δx.
Egalând cele două expresii obținem ecuația $-K\cdot S\cdot\Delta x\cdot T''(x)=-\alpha\cdot T(x)\cdot p\cdot\Delta x$, adică

$$T''(x)-\omega_0{}^2\cdot T(x)=0$$

unde $\omega_0{}^2=p\cdot\alpha/(K\cdot S)$. Soluția generală a ecuației este

$$T(x)=A\cdot e^{\omega_0 x}+B\cdot e^{-\omega_0 x}.$$

Deoarece condiția $\lim_{x\to\infty}T(x)=0$ este naturală rezultă că $A=0$. Din $T(0)=T_0$ se deduce

$$T(x)=T_0\cdot e^{-\omega_0 x}$$

ceea ce arată că temperatura scade exponențial în raport cu distanța.

5. Ecuații de mişcare (ecuații liniare

5a. Căderea corpurilor (mişcare rectilinie)

Miscarea rectilinie a unui corp de masă *m* asupra căruia acționează o forță de atracție proporțională cu distanța *x* la un punct fix O este descrisă de ecuația

$$x''(t)=-g$$

unde $x = x(t)$ reprezintă distanța de la corp pâna la O, măsurată la momentul de timp *t*.

Dacă notăm $v(t) = x'(t)$ obținem ecuația $v'(t) = -g$ cu soluția $v(t) = -gt + C_1$ şi din $x'(t) = -gt + C_1$ rezultă $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$.

Dacă la momentul inițial $t = 0$ corpul se afla la distanța x_0 față de origine şi a fost lansat cu viteza $v(0) = v_0$ atunci legea de mişcare a corpului va fi

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0 .$$

5b. Mişcarea unui corp într-un câmp de forțe centrale (mişcare plană)
Să se descrie mişcare unui punct material într-un plan dacă acesta este atras de centrul *O* cu o forță proporțională cu distanța la *O*. Mişcarea începe dintr-un punct aflat la distanța *a* de centrul *O* şi viteza inițială, perpendiculară pe raza *OA*, are mărimea v_0.

Variabila independentă este timpul *t* iar funcțiile necunoscute sunt $x = x(t)$ şi $y = y(t)$ care reprezintă coordonatele punctului material la momentul *t*.

Ecuația fundamentală a dinamicii se scrie $\begin{cases} m \cdot x'' = -k^2 \cdot x \\ m \cdot y'' = -k^2 \cdot y \end{cases}$.

Se consideră (pentru simplificarea calculelor) că mişcarea începe din $A(a,0)$.

Condițiile inițiale sunt deci $\begin{cases} x(0) = a \quad y(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \quad y'(0) = v_0 \end{cases}$.

Soluția generală a sistemului de ecuații (independente una de cealaltă) este

$$\begin{cases} x(t) = A \cdot \cos\left(\frac{k}{\sqrt{m}} t\right) + B \cdot \sin\left(\frac{k}{\sqrt{m}} t\right) \\ y(t) = C \cdot \cos\left(\frac{k}{\sqrt{m}} t\right) + D \cdot \sin\left(\frac{k}{\sqrt{m}} t\right) \end{cases}.$$

Din condițiile inițiale rezultă $A = a$ $, B = 0,$ $C = 0,$ $D = v_0 \cdot \frac{\sqrt{m}}{k}$, deci soluția sistemului este

$$x(t) = a \cdot \cos\left(\frac{k}{\sqrt{m}} t\right), \quad y(t) = v_0 \cdot \frac{\sqrt{m}}{k} \cdot \sin\left(\frac{k}{\sqrt{m}} t\right).$$

Din eliminarea lui *t* între cele două ecuații rezultă că traiectoria punctului are ecuația

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{m \cdot v_0^{\,2}} y^2 = 1$$

ceea ce arată ca punctul se mişcă pe o elipsă

6. Ecuații neliniare

6a. Determinarea coeficientului de frecare

Un punct material de masă *m* se mişcă cu frecare pe un cerc vertical. La momentul inițial se află la o extremitate a diametrului orizontal şi are viteza inițială $v_0 = 0$. El atinge cel mai coborât punct de pe cerc cu o viteză egală cu 0. Să se determine coeficientul de frecare μ dintre punct şi cerc.

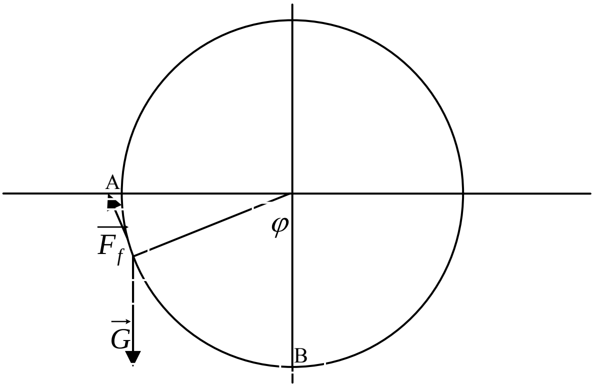

Figura 5. Mişcare cu frecare

Variabila independentă este timpul iar funcția necunoscută este $\phi = \phi(t)$ care măsoară unghiul la centru format de raza vectoare cu raza vectoare inițială *OA*.

Considerăm $\overrightarrow{t_C}$ şi $\overrightarrow{n_C}$ vectorii tangent, respective normal la cercul (C).

Viteza corpului este $\vec{v}(t) = r \cdot \phi'(t) \cdot \overrightarrow{t_C}$ iar accelerația este $\vec{a}(t) = r \cdot \phi''(t) \cdot \overrightarrow{t_C} + r \cdot v^2(t) \cdot \overrightarrow{n_C}$

Ecuația de mişcare, $m \cdot \vec{a} = \vec{G} + \vec{R} + \overrightarrow{F_f}$, proiectată după direcția normalei şi a tangentei la cerc aceasta conduce la sistemul

$$\begin{cases} G\cos\phi - F_f = m \cdot r \cdot \phi'' \\ R - G \cdot \sin\phi = -m \cdot r \cdot \phi'^2 \end{cases}, \text{ adică } \begin{cases} m \cdot r \cdot \phi'' = m \cdot g \cdot \cos\phi - \mu \cdot R \\ -m \cdot r \cdot \phi'^2 = m \cdot g \cdot \sin\phi - R \end{cases}.$$

Eliminând $R = m \cdot g \cdot \sin\phi + m \cdot r \cdot \phi'^2$ între cele două ecuații obținem ecuația diferențială neliniară de ordinul II incompletă (variabila independentă nu apare explicit)

$$r \cdot \phi'' + \mu \cdot \phi'^2 + \mu \cdot g \sin\phi - g \cdot \cos\phi = 0.$$

Se notează $z = \phi'^2$ şi , deoarece $z' = 2 \cdot \phi' \cdot \phi'' = z'(\phi') \cdot \phi'$, se obține $\phi'' = \frac{1}{2} z'$.

Ecuația de ordinal II devine

$$\frac{r}{2} \cdot z' + \mu \cdot r \cdot z = g \cdot (\cos\phi - \mu \cdot \sin\phi)$$

care este o ecuație liniară de ordinul I.

Ecuația omogenă atașată, $z'=-2\cdot\mu\cdot z$ are soluția generală $z=C\cdot e^{-2\cdot\mu\cdot\phi}$.

Aplicând metoda variației constantei obținem $C'(\phi)=\frac{2}{r}\cdot g\cdot e^{2\cdot\mu\cdot\phi}(\cos\phi-\mu\cdot\sin\phi)$

şi, prin integrare directă rezultă $C(\phi)=\frac{2\cdot g}{r}e^{2\mu\phi}\frac{3\mu\cdot\cos\phi+(1-2\cdot\mu^2)\cdot\sin\phi}{1+4\cdot\mu^2}+K$,

ceea ce arată că ecuația liniară are soluția

$$z(\phi)=\frac{2g}{r}\frac{3\mu\cdot\cos\phi+(1-2\cdot\mu^2)\cdot\sin\phi}{1+4\cdot\mu^2}+K\cdot e^{-2\mu\phi}.$$

Această ecuație nu poate fi rezolvată analitic dar acest lucru nici nu este necesar deoarece, din condițiile inițiale $v(0)=0,\ v\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, adică $z(0)=0,\ z\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

rezultă $\begin{cases}\frac{2\cdot g}{r}\cdot\frac{3\cdot\mu}{1+4\cdot\mu^2}+K=0\\ \frac{2\cdot g}{r}\cdot\frac{1-2\mu^2}{1+4\cdot\mu^2}+K\cdot e^{-\mu\cdot\pi}=0\end{cases}$ adică $(1-2\cdot\mu^2)-3\cdot\mu\cdot e^{-\mu\cdot\pi}=0$

Nici această ecuație irațională cu necunoscuta μ nu poate fi rezolvată analitic dar soluția ei, aproximată numeric cu o eroare de 0.01 este $\mu=0.62$.

6b. Determinarea ecuației unei curbe

Să se determine curbele plane care au raza de curbură constantă $R>0$.

Ecuația curbei căutate va fi $y=y(x)$. Raza de curbură este definită de $\rho=\frac{\left(1-(y')^2\right)^{3/2}}{y''}$, deci ecuația problemei este

$$\left(1-(y')^2\right)^{3/2}=R\cdot y''.$$

Această ecuație neliniară incompletă se transformă într-un system de ecuații de ordinul I

$$\begin{cases}y'=u\\ R\cdot u'=\left(1+u^2\right)^{3/2}\end{cases}.$$

Din ultima ecuație a sistemului rezultă, prin integrare directă $\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}=\frac{x-C}{R}$ adică $u=\pm\frac{x-C}{\sqrt{R^2-(x-C)^2}}$. Inlocuind u în prima ecuație şi integrand obținem $y=-\sqrt{R^2-(x-C)^2}+C_1$, adică

$$(y-C_1)^2+(x-C)^2=R^2.$$

Această relație arată ca doar cercurile de rază R (şi centru arbitrar $A(C, C_1)$) au raza de curbură constantă, egală cu R.